

**UFR de Mathématique et Informatique**  
**L2 Informatique**

**Combinatoire — 2005-2006**

**Contrôle Terminal, session de septembre 2006**

Durée : 1 heure

*Tous documents et calculettes autorisés*  
*Téléphones et ordinateurs portables interdits*

**Justifier soigneusement les réponses**

(1) Connaissant le lien entre  $\binom{n}{n-p}$  et  $\binom{n}{p}$  vu en cours, ainsi que l'exercice de TD sur le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble, calculer :

$$\sum_{k=0}^m \binom{4m}{2k} = \binom{4m}{0} + \binom{4m}{2} + \cdots + \binom{4m}{2m}$$

pour  $m > 0$ .

(2) Supposons l'application  $f : E \rightarrow E$  idempotente, c.-à-d. pour tout  $x \in E$  on a  $f(f(x)) = f(x)$ .

Montrer que les 4 énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $f$  est injective ;
- (ii)  $f$  est surjective ;
- (iii)  $f$  est bijective ;
- (iv)  $f = Id_E$ , l'identité sur  $E$ , c.-à-d. pour tout  $x \in E$  on a  $f(x) = x$ .

(3) On définit la relation  $R$  sur  $\mathbb{N}$  par  $a R b$  si et seulement si  $a = b - 3$ . Quelle est la relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}$  engendrée par  $R$  (c.-à-d. la plus petite relation réflexive, antisymétrique et transitive contenant  $R$ ) ?