

UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2005-2006

Contrôle Terminal, session de septembre 2006

Durée : 1 heure

Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones et ordinateurs portables interdits

Justifier soigneusement les réponses

(1) Connaissant le lien entre $\binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p}$ vu en cours, ainsi que l'exercice de TD sur le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble, calculer :

$$\sum_{k=0}^m \binom{4m}{2k} = \binom{4m}{0} + \binom{4m}{2} + \cdots + \binom{4m}{2m}$$

pour $m > 0$.

(2) Supposons l'application $f : E \rightarrow E$ idempotente, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(f(x)) = f(x)$.

Montrer que les 4 énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est injective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est bijective ;
- (iv) $f = Id_E$, l'identité sur E , c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(x) = x$.

(3) On définit la relation R sur \mathbb{N} par $a R b$ si et seulement si $a = b - 3$. Quelle est la relation d'ordre partiel sur \mathbb{N} engendrée par R (c.-à-d. la plus petite relation réflexive, antisymétrique et transitive contenant R) ?