

**UFR de Mathématique et Informatique**  
**L3 Informatique**

**Probabilités, Statistiques et Combinatoire — 2008-2009**

**Contrôle Terminal, partie “Combinatoire” — session de mai-juin 2009**

Durée conseillée : 1 heure

*Documents autorisés : uniquement les 9 photocopiés de combinatoire*

*Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits*

**Justifier soigneusement les réponses**

(1) Pour deux entiers  $n, t \geq 0$ , écrivons  $\binom{n}{t}$  pour le coefficient binomial de  $t$  dans  $n$ , c.-à-d. le nombre de parties de cardinal  $t$  dans un ensemble de cardinal  $n$ .

Considérons des entiers  $m, p, q, r > 0$  avec  $m \leq p + q + r$ . Démontrer qu'on a

$$\sum_a \sum_b \binom{p}{a} \binom{q}{b} \binom{r}{m-a-b} = \binom{p+q+r}{m},$$

où les variables entières  $a$  et  $b$  des deux sommes sont soumises aux 3 conditions

$$0 \leq a \leq p, \quad 0 \leq b \leq q, \quad 0 \leq m - a - b \leq r.$$

**Indication :** Si j'ai  $a$  boules bleues,  $b$  boules vertes et  $m - a - b$  boules rouges, en oubliant les couleurs, cela fait  $m$  boules en tout.

(2) Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $> 2$ . Pour  $p \in E$ , on définit la relation binaire  $\overset{p}{\sim}$  sur  $\mathcal{P}(E)$  (l'ensemble des parties de  $E$ ), où pour tout  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , on a  $A \overset{p}{\sim} B$  si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $p$  appartient à  $A$ , et  $B$  est obtenu en enlevant  $p$  de  $A$  :  $p \in A$ , et  $B = A \setminus \{p\}$  ;
- $p$  n'appartient pas à  $A$ , et  $B$  est obtenu en ajoutant  $p$  à  $A$  :  $p \notin A$ , et  $B = A \cup \{p\}$ .

**Questions :**

- (i) Si  $A \overset{p}{\sim} B$ , pour quels  $C \in \mathcal{P}(E)$  a-t-on  $B \overset{p}{\sim} C$  ?
- (ii) La relation  $\overset{p}{\sim}$  est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?
- (iii) Quelle est la relation d'équivalence engendrée par  $\overset{p}{\sim}$  (c.-à-d. la plus petite relation d'équivalence  $\equiv$  telle que  $A \overset{p}{\sim} B \implies A \equiv B$ ) ?
- (iv) **Bonus :** Soient  $p, q \in E$  avec  $p \neq q$ . Quelle est la relation d'équivalence engendrée par la réunion de  $\overset{p}{\sim}$  et  $\overset{q}{\sim}$  (c.-à-d. la plus petite relation d'équivalence  $\equiv$  telle que si  $A \overset{p}{\sim} B$  ou  $A \overset{q}{\sim} B$ , alors  $A \equiv B$ ) ?