L2 Informatique — Combinatoire — 2006-2007

Contrôle Terminal, session de janvier 2007

Corrigé

(1) Les 3 énoncés sont équivalents. En effet, R est supposée *symétrique* et *transitive*, donc :

— Si R est *totale à gauche*, c.-à-d. $\forall a \in E,\ \exists b \in E$ tel que $a\ R\ b$, alors par symétrie on a $b\ R\ a$, ce qui signifie que R est *totale à droite*.

— Si R est *totale à droite*, c.-à-d. $\forall a \in E,\ \exists b \in E$ tel que $b\ R\ a$, alors par symétrie on a $a\ R\ b$, et par transitivité $a\ R\ b\ R\ a$ donne $a\ R\ a$, donc R est *réflexive*.

— Si R est *réflexive*, c.-à-d. $\forall a \in E,\ a\ R\ a$, alors clairement $\exists b \in E$ tel que $a\ R\ b$, donc R est *totale à gauche*.

On a ainsi montré l'équivalence entre les trois par implication circulaire.

(2) On a $10^0 = 1 \equiv 1\ (mod.\ 13)$. Dans l'énoncé il est écrit que $10 = 13 - 3$, $100 = (13 \times 8) - 4$ et $1000 = (13 \times 77) - 1$, Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} 10^1 &\equiv -3\ (mod.\ 13)\ , \\ 10^2 &\equiv -4\ (mod.\ 13)\ , \\ 10^3 &\equiv -1\ (mod.\ 13)\ , \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} 10^4 = 10^1 \times 10^3 &\equiv (-3) \times (-1) \equiv 3\ (mod.\ 13)\ , \\ 10^5 = 10^2 \times 10^3 &\equiv (-4) \times (-1) \equiv 4\ (mod.\ 13)\ , \\ 10^6 = 10^3 \times 10^3 &\equiv (-1) \times (-1) \equiv 1\ (mod.\ 13)\ . \end{aligned}$$

Donc pour tout naturel m on a $10^{6m} = (10^6)^m \equiv 1^m \equiv 1\ (mod.\ 13)$. Par conséquent la congruence de $10^n\ (mod.\ 13)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ répète un cycle de longueur 6 : $1, -3, -4, -1, 3, 4$. Formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (mod.\ 13) \quad 10^n \equiv \begin{cases} 1 & \text{pour } n \equiv 0\ (mod.\ 6)\ , \\ -3 & \text{pour } n \equiv 1\ (mod.\ 6)\ , \\ -4 & \text{pour } n \equiv 2\ (mod.\ 6)\ , \\ -1 & \text{pour } n \equiv 3\ (mod.\ 6)\ , \\ 3 & \text{pour } n \equiv 4\ (mod.\ 6)\ , \\ 4 & \text{pour } n \equiv 5\ (mod.\ 6)\ . \end{cases}$$

Pour trouver la congruence modulo 13 du nombre 1234567890987654321, on aligne les chiffres avec la répétition du cycle (placé de droite gauche), on fait les produits :

chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10^n *mod.* 13	1	4	3	−1	−4	−3	1	4	3	−1	−4	−3	1	4	3	−1	−4	−3	1
produit	1	8	9	−4	−20	−18	7	32	27	0	−36	−24	7	24	15	−4	−12	−6	1

et on additionne le tout :

$$1 + 8 + 9 - 4 - 20 - 18 + 7 + 32 + 27 + 0 - 36 - 24 + 7 + 24 + 15 - 4 - 12 - 6 + 1 = 7\ .$$

Donc $1234567890987654321 \equiv 7\ (mod.\ 13)$.

(3) Toute donne peut être obtenue par une succession de choix de cartes. Si on compte le nombre total de choix successifs, cela ne correspond pas nécessairement au nombre de donnes, parce que la donne est un ensemble non ordonné de 5 cartes, donc la même donne peut être obtenue par plusieurs suites de cartes choisies. Par exemple s'il faut 3 cartes rouges et 2 noires, on peut soit choisir les 2 noires puis les 3 rouges, soit choisir les 3 rouges puis les 2 noires. Il faut donc associer à un type de donne une suite de choix qui détermine de façon unique toute donne de ce type, mais est aussi uniquement déterminé par la donne. Écrivons C_n^p pour $\binom{n}{p}$, le coefficient binomial de p dans n :

(i) Il s'agit de choisir 5 cartes parmi 32, donc il y a C_{32}^5 donnes.

(ii) Une donne comprenant toutes les couleurs a 2 cartes d'une même couleur, et 1 carte de chaque autre couleur. La suite de choix correspondant bi-univoquement à la donne est :
- choix de la couleur avec 2 cartes : 4.
- choix des 2 cartes de cette couleur : C_8^2.
- pour chacune des 3 autres couleurs, choisir la carte: 8 choix qu'on opère 3 fois.

Donc le nombre de donnes à 4 couleurs est $4 \times C_8^2 \times 8^3 = 2^{13} \times 7$.

(iii) Une donne a au moins 2 couleurs (donc 2, 3 ou 4 couleurs) si et seulement si elle n'est pas à une seule couleur. Le nombre de choix d'une donne dans une seule couleur revient à choisir 1 couleur parmi 4 ($C_4^1 = 4$ choix), puis 5 cartes parmi 8 (C_8^5 choix), donc $4 \times C_8^5$ choix en tout. Comme il y a C_{32}^5 donnes en tout, cf. (i), on a $C_{32}^5 - 4 \times C_8^5$ donnes avec au moins 2 couleurs.

(iv) La suite de choix correspondant bi-univoquement à un carré est :
- choix de la figure représentée par 4 cartes : 8.
- choix de la 5ème carte, de n'importe quelle couleur et n'importe quelle autre figure : 4×7.

Donc le nombre de carrés est $8 \times 4 \times 7 = 2^5 \times 7$.

(v) La suite de choix correspondant bi-univoquement à un full est :
- choix de la figure représentée 3 fois: 8.
- choix des 3 couleurs pour cette figure: $C_4^3 = 4$.
- choix d'une autre figure représentée 2 fois: 7.
- choix des 2 couleurs pour cette figure: $C_4^2 = 6$.

Donc le nombre de fulls est $8 \times 4 \times 7 \times 6 = 2^6 \times 3 \times 7$.