UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2005-2006

Contrôle Terminal, session de janvier 2006

Durée : 1 heure

Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones et ordinateurs portables interdits

Justifier soigneusement les réponses

Rappel : formule d'inclusion-exclusion.

$$card\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2}\big) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\big) - \ldots + (-1)^{n-1} card\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) \ .$$

(1) Une population d'étudiants se voit proposer 3 sports : basket-ball, volley-ball et gymnastique. Ainsi :

— 12 étudiants ne font aucun sport.

D'autres en pratiquent au moins un :

— 17 font du basket-ball.

— 15 font du volley-ball.

— 12 font de la gymnastique.

Parmi ces étudiants sportifs, certains pratiquent au moins deux sports :

— 7 font à la fois du basket-ball et du volley-ball.

— 5 font à la fois du basket-ball et de la gymnastique.

— 4 font à la fois du volley-ball et de la gymnastique.

Parmi ceux-ci il y a des fanatiques :

— 3 font tout : du basket-ball, du volley-ball et de la gymnastique.

Question : Combien d'étudiants y a-t-il ?

(2) On définit la relation R sur $\mathbb{N}$ par $a \ R \ b$ si et seulement si $b = a + 4$. Quelle est la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ engendrée par R ?

(3) Calculer :

(*a*) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k}$.

(*b*) $\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{k}$ pour n impair.

(4) Calculer 123456789 mod 9 et 123456789 mod 11 (les restes de la division de 123456789 par 9 et par 11 respectivement).