UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2006-2007

Contrôle Continu, novembre 2006

Durée : 1 heure
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones éteints !

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soient A et B deux ensembles non-vides ($A, B \neq \emptyset$), $f : A \to B$ et $g : B \to A$ telles que $g \circ f \circ g = g$ ($\forall b \in B$, $g(f(g(b))) = g(b)$) et $f \circ g \circ f = f$ ($\forall a \in A$, $f(g(f(a))) = f(a)$). Montrer que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective.
(ii) g est surjective.
(iii) $g \circ f = Id_A$.

NB. On peut utiliser les résultats vus en TD pour obtenir une partie de la preuve.

(2) Soient A et B deux ensembles disjoints ($A \cap B = \emptyset$), de cardinaux $card(A) = a > 0$ et $card(B) = b > 0$. Donner le nombre de parties X de $A \cup B$ telles que $X \cap A \neq \emptyset$ et $X \cap B \neq \emptyset$.

(3) On définit la relation S sur le plan $\mathbb{R}^2$ par

$$\big[(x, y)\ S\ (x', y')\big] \iff \big[(x', y') = (-x, y) \quad \text{ou} \quad (x', y') = (x, -y)\big] \ .$$

(a) Illustrer cette relation par un graphique dans $\mathbb{R}^2$ (avec 2 axes) montrant des points et des flèches entre des points liés par cette relation.
(b) La relation S est-elle symétrique ?
(c) Expliciter S^2.
(d) Expliciter la fermeture transitive S^+ de S.