# L3I COMBINATOIRE — 8 : COMBINATOIRE ENUMERATIVE

*Christian RONSE, ICube, Département d'Informatique de l'Université de Strasbourg*

Nous allons donner des formules pour les cardinaux de divers types de combinaisons d'ensembles donnés ou de fonctions entre ces ensembles.

Le cardinal de la réunion de $n$ ensembles mutuellement disjoints ($n \geq 2$) est la somme de leurs cardinaux respectifs :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n) \qquad \Longrightarrow \qquad card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) \quad .$$

Pour deux ensembles $A$ et $B$ on a :

$$\begin{aligned}
& & card(A \setminus B) &= card(A) - card(A \cap B) \quad , \\
B \subseteq A & \quad \Longrightarrow & card(A \setminus B) &= card(A) - card(B) \quad , \\
& & card(A \cup B) &= card(A) + card(B) - card(A \cap B) \quad , \\
& & card(A \bigtriangleup B) &= card(A) + card(B) - 2\, card(A \cap B) \quad , \\
& & card(A \times B) &= card(A) \cdot card(B) \quad , \\
& & card(A^B) &= card(A)^{card(B)} \quad .
\end{aligned}$$

Pour un naturel $p$, on a

$$card(A^p) = card(A)^p \quad .$$

Donc pour $card(A) = n$, il y a $n^p$ suites ordonnées $x_0, \ldots, x_{p-1}$ d'éléments de $A$. Une telle suite est appelée *arrangement avec répétitions* de $p$ éléments parmi $n$ ; le mot *arrangement* signifie que la suite est ordonnée, et le terme *avec répétitions* que les éléments de cette suite ne sont pas nécessairement distincts.

Comme $\mathcal{P}(A)$ est équipotent à $2^A$ (où $2 = \{0, 1\}$), on a

$$card\big(\mathcal{P}(A)\big) = 2^{card(A)} \quad .$$

Le cardinal de la réunion de $n$ ensembles non nécessairement disjoints ($n \geq 2$) est donnée par la *formule d'inclusion-exclusion* de Sylvester :

$$\begin{aligned}
card\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) = & \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2}\big) \\
& + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} card\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\big) - \ldots + (-1)^{n-1} card\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) \quad .
\end{aligned}$$

Si on écrit $\mathcal{P}(k, n)$ pour l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $k$, cette formule prend la forme :

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big( (-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \quad . \tag{1}$$

Cela donne pour $n = 2$ :

$$card\big(A_1 \cup A_2\big) = card(A_1) + card(A_2) - card\big(A_1 \cap A_2\big) \quad ,$$

pour $n = 3$ :

$$\begin{aligned}
card\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3\big) = & \; card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card\big(A_1 \cap A_2\big) - card\big(A_1 \cap A_3\big) \\
& - card\big(A_2 \cap A_3\big) + card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) \quad ,
\end{aligned}$$

et pour $n = 4$ :

$$card\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\big) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + card(A_4)$$
$$-card\big(A_1 \cap A_2\big) - card\big(A_1 \cap A_3\big) - card\big(A_1 \cap A_4\big) - card\big(A_2 \cap A_3\big) - card\big(A_2 \cap A_4\big) - card\big(A_3 \cap A_4\big)$$
$$+card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) + card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_4\big) + card\big(A_1 \cap A_3 \cap A_4\big) + card\big(A_2 \cap A_3 \cap A_4\big)$$
$$-card\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\big) \ .$$

Cette formule est prouvée par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, elle donne $card(A_1) = card(A_1)$. Pour $n = 2$, on a $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2])$ et $A_1 \cap (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2]) = \emptyset$, avec $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, donc

$$\begin{aligned} card\big(A_1 \cup A_2\big) &= card\big(A_1 \cup (A_2 \setminus [A_1 \cap A_2])\big) = card(A_1) + card\big(A_2 \setminus [A_1 \cap A_2]\big) \\ &= card(A_1) + card(A_2) - card\big(A_1 \cap A_2\big) \ . \end{aligned}$$

Supposons la formule vraie pour $n$, montrons-la pour $n + 1$. La formule pour $n = 2$ donne

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + card(A_{n+1}) - card\Big(\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1}\Big) \ . \qquad (*)$$

La formule pour $n$ donne (1), et comme $\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap A_{n+1}]$, la formule pour $n$ donne

$$\begin{aligned} -card\Big(\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \cap A_{n+1}\Big) &= -card\Big(\bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap A_{n+1}]\Big) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} [A_i \cap A_{n+1}]\Big)\Big) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P \cup \{n+1\}} A_i\Big)\Big) \\ \text{[posons } j = k+1\text{]} \qquad &= \sum_{j=2}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j-1,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P \cup \{n+1\}} A_i\Big)\Big) \ . \end{aligned}$$

L'unique élément de $\mathcal{P}(1, n+1) \setminus \mathcal{P}(1, n)$ est $\{n + 1\}$, tandis que pour $j \geq 2$, $\mathcal{P}(j, n+1) \setminus \mathcal{P}(j, n)$ est formé des $P \cup \{n + 1\}$ pour $P \in \mathcal{P}(j - 1, n)$. De plus, $\mathcal{P}(n + 1, n) = \emptyset$. Donc $(*)$ devient :

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big)$$
$$+ \sum_{P \in \mathcal{P}(1,n+1) \setminus \mathcal{P}(1,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big) + \sum_{j=2}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1) \setminus \mathcal{P}(j,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \Big((-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) + \sum_{j=1}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1) \setminus \mathcal{P}(j,n)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big)$$
$$\text{[remplaçons } k \text{ par } j\text{]} \qquad = \sum_{j=1}^{n+1} \Big((-1)^{j-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(j,n+1)} card\Big(\bigcap_{i \in P} A_i\Big)\Big) \ ,$$

c.-à-d. la formule (1) pour $n + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$, la *factorielle* de $n$, par récurrence :

$$0! = 1 \ ,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \ .$$

Donc $1! = 0! = 1$ et pour $n > 1$ on a $n! = 2 \cdots n = \prod_{k=2}^{n} k$.

Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On note $A_n^p$ le nombre d'injections d'un ensemble $A$ de cardinal $p$ vers un ensemble $B$ de cardinal $n$. En particulier, pour $A = \{0, \ldots, p-1\}$, une telle injection correspond à une suite ordonnée $x_0, \ldots, x_{p-1}$ d'éléments mutuellement distincts de $B$. Une telle suite est appelée *arrangement sans répétition* de $p$ éléments parmi $n$ ; le terme *sans répétition* signifie que les éléments de cette suite sont deux à deux distincts.

Par définition, $A_n^p = 0$ pour $p > n$. Sinon :

**Proposition** : *Pour $0 \leq p \leq n$,*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad . \tag{2}$$

On le montre par récurrence sur $p$. Soient $A$ et $B$ tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$. Si $p = 0$, l'unique injection $A \to B$ est vide, et on a $n!/(n-p)! = n!/n! = 1$. Supposons que le résultat soit vrai pour $p$, montrons-le pour $p+1$ (avec $n \geq p+1$). Soit $card(A) = p+1$, et prenons $x \in A$ ; pour une injection $f : A \to B$, si $y = f(x)$, la restriction de $f$ à $A \setminus \{x\}$ est une injection $A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$, et réciproquement, toute injection $g : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$ est la restriction à $A \setminus \{x\}$ d'une unique injection $f : A \to B$ telle que $y = f(x)$. Donc le nombre de choix possibles pour $f$ est le nombre de choix pour $y = f(x)$ multiplié par le nombre d'injections $A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$, avec $card(A \setminus \{x\}) = p$ et $card(B \setminus \{y\}) = n-1$, c.-à-d. $A_n^{p+1} = n \times A_{n-1}^p = n \times (n-1)!/([n-1]-p)! = n!/(n-[p+1])!$.

**Corollaire** : *Soient $A$ et $B$ deux ensembles avec $card(A) = card(B) = n$. Alors le nombre de bijections $A \to B$ est $A_n^n = n!$.*

En effet, cela correspond au cas où $p = n$, donc $n!/(n-p)! = n!/0! = n!$. On appelle une *permutation de $A$* une bijection $A \to A$ ; on précise parfois que c'est une *permutation sans répétition.*

**Corollaire** : *Soit $A$ un ensemble avec $card(A) = n$. Alors le nombre de permutations de $A$ est $n!$.*

On a la formule de récurrence pour $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = p\, A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p \quad . \tag{3}$$

Notons d'abord que pour $p = 0$, elle prend la forme $A_n^0 = 0\, A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^0 = A_{n-1}^0$, qui est vraie parce que $A_n^0 = A_{n-1}^0 = 1$. Ensuite pour $p = n$, elle devient $A_n^n = n\, A_{n-1}^{n-1} + A_{n-1}^n$, qui est vraie parce que $A_n^n = n!$, $A_{n-1}^{n-1} = (n-1)!$ et $A_{n-1}^n = 0$. Enfin pour $0 < p < n$ on peut l'obtenir à partir de (2).

On peut également prouver (3) par raisonnement. Soient $A, B$ tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$, et soit $x \in B$. Une injection $f : A \to B$ se retrouve dans un des deux cas suivants :

— $x \notin Im(f)$, donc $f$ est une injection $A \to B \setminus \{x\}$, et on a $A_{n-1}^p$ choix pour $f$.

— $x = f(y)$ pour un $y \in A$, donc $f$ est formée du couple $(y, x)$ et d'une injection $g : A \setminus \{y\} \to B \setminus \{x\}$ ; on a $p$ choix pour $y$, et pour chaque choix de $y$ on a encore $A_{n-1}^{p-1}$ choix pour $g$.

En additionnant les deux, on obtient (3).

Le *coefficient binomial de $p$ dans $n$*, qu'on écrit $C_n^p$ (notation française) ou $\binom{n}{p}$ (notation anglo-saxonne), est le nombre de parties de cardinal $p$ d'un ensemble de cardinal $n$ :

$$card(E) = n : \qquad \binom{n}{p} = C_n^p = card\big(\{X \in \mathcal{P}(E) \mid card(X) = p\}\big) \quad .$$

Un tel sous-ensemble $\{x_0, \ldots, x_{p-1}\}$ d'éléments mutuellement distincts de $B$ est appelé *combinaison sans répétition* de $p$ éléments parmi $n$ ; le mot *combinaison* signifie que la suite $x_0, \ldots, x_{p-1}$ n'est pas ordonnée.

Par définition, $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$ ou $p < 0$. Sinon :

**Proposition**: *Pour* $0 \le p \le n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \ . \qquad (4)$$

En effet, soient $A$ et $B$ deux ensembles tels que $card(A) = p$ et $card(B) = n$. A toute injection $f : A \to B$ on associe son image $Im(f)$, qui est une partie de $B$ de cardinal $p$. Etant donnée une partie $C$ de $B$ de cardinal $p$, toute injection $f : A \to B$ telle que $Im(f) = C$ est en fait une bijection $A \to C$. Comme il y a $\binom{n}{p}$ choix pour une telle partie $C$, $p!$ bijections $A \to C$ et $A_n^p = n!/(n-p)!$ injections $A \to B$, on en déduit que $n!/(n-p)! = \binom{n}{p} \times p!$, c.-à-d. la formule (4).

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. L'application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) : A \mapsto A^c = E \setminus A$ induit une bijection entre les parties de cardinal $p$ et celles de cardinal $n-p$, puisque $card(E \setminus A) = n - card(A)$ ; donc

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \ .$$

On peut aussi obtenir cette égalité par la formule (4). Comme $E$ contient une unique partie vide et $n$ singletons, on a

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \ , \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \ .$$

On a la formule de récurrence pour $n > 0$ et $0 \le p \le n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \ . \qquad (5)$$

Notons d'abord que pour $p = 0$, elle prend la forme $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0}$, qui est vraie parce que $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$ et $\binom{n-1}{-1} = 0$. Ensuite pour $p = n$, elle devient $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$, qui est vraie parce que $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} = 1$ et $\binom{n-1}{n} = 0$. Enfin pour $0 < p < n$ on a

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \ .\end{aligned}$$

On peut aussi prouver (5) par raisonnement. Pour $card(E) = n$ et $x \in E$, les $\binom{n}{p}$ parties de $E$ de cardinal $p$ se partitionnent en deux sortes :

— celles qui ne contiennent pas $x$ ; ce sont des parties de cardinal $p$ de $E \setminus \{x\}$ (de cardinal $n-1$), il y en a donc $\binom{n-1}{p}$.

— celles qui contiennent $x$ ; elles sont de la forme $\{x\} \cup X$, où $X$ est une partie de cardinal $p-1$ de $E \setminus \{x\}$ (de cardinal $n-1$), il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$.

En additionnant les deux, on obtient (5).

On peut ainsi faire un tableau où $\binom{n}{p}$ est placé dans la case à l'intersection de la $n$-ième ligne et de la $p$-ième colonne, et la formule (5) veut dire que la valeur dans une case est la somme des valeurs des deux cases au dessus et au dessus à gauche, c.-à-d. on a

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| | $a+b$ |

Cela donne pour $p, n = 0, \ldots, 5, \ldots$ :

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | $\ldots$ |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | $\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\ddots$ | $\ddots$ | | | $\ldots$ |

Les valeurs 0 correspondent au cas où $p > n$. On peut disposer les cases correspondant au cas $p \leq n$ dans un triangle, comme suit :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

C'est le *triangle de Pascal*. Ici chaque extrémité gauche ou droite d'une ligne a la valeur 1, et chaque nombre qui n'est pas une telle extrémité est égal à la somme des deux nombres au dessus de lui, c.-à-d. on a

$$\begin{array}{ccc}
a & & b \\
 & a+b &
\end{array}$$

Soient $X$ et $Y$ deux variables et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'*identité binomiale* de Newton :

$$(X+Y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n-p} \quad . \tag{6}$$

Elle est prouvée par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, elle donne $(X+Y)^0 = \binom{0}{0} X^0 Y^0$ qui est vraie, car $(X+Y)^0 = X^0 = Y^0 = \binom{0}{0} = 1$. Supposons-la vraie pour $n$, et vérifions-la pour $n+1$ :

$$\begin{aligned}
(X+Y)^{n+1} &= (X+Y) \cdot (X+Y)^n = (X+Y) \Big( \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n-p} \Big) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{p+1} Y^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n+1-p} \quad .
\end{aligned} \tag{$**$}$$

En posant $q = p+1$ et utilisant $\binom{n}{-1} = 0$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{p+1} Y^{n-p} = \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} \quad .$$

Comme $\binom{n}{n+1} = 0$, on a (en posant $q = p$)

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p Y^{n+1-p} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q} X^q Y^{n+1-q} \quad .$$

Donc $(**)$ donne

$$\begin{aligned}
(X+Y)^{n+1} &= \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q-1} X^q Y^{n+1-q} + \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n}{q} X^q Y^{n+1-q} \\
&= \sum_{q=0}^{n+1} \left[ \binom{n}{q-1} + \binom{n}{q} \right] X^q Y^{n+1-q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n+1}{q} X^q Y^{n+1-q} \quad ,
\end{aligned}$$

c.-à-d. la formule (6) pour $n+1$.

**Proposition**: *Soient $A$ et $B$ deux ensembles avec $card(A) = a$, $card(B) = b$ et $a \geq b$. Alors le nombre de surjections $A \to B$ est*

$$\sum_{k=0}^{b} \Big( (-1)^k \binom{b}{k} (b-k)^a \Big) \quad . \tag{7}$$

Ecrivons $B = \{x_1, \ldots, x_b\}$ et pour chaque $i = 1, \ldots, b$, posons $F_i = \{f \in B^A \mid x_i \notin Im(f)\}$. Pour une partie $P$ de $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$\bigcap_{i \in P} F_i = \big\{ f \in B^A \mid Im(f) \subseteq B \setminus \{x_i \mid i \in P\} \big\} \ ,$$

qui s'identifie à $\big(B \setminus \{x_i \mid i \in P\}\big)^A$, donc

$$card\Big(\bigcap_{i \in P} F_i\Big) = card\big(B \setminus \{x_i \mid i \in P\}\big)^{card(A)} = \big[b - card(P)\big]^a \ .$$

Donc pour $P \in \mathcal{P}(k, b)$ (c.-à-d. $P$ de cardinal $k$), on obtient $(b-k)^a$. Alors la formule d'inclusion-exclusion (1) donne

$$card\Big(\bigcup_{i=1}^{b} F_i\Big) = \sum_{k=1}^{b} \Big( (-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,b)} card\Big(\bigcap_{i \in P} F_i\Big) \Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{b} \Big( (-1)^{k-1} \sum_{P \in \mathcal{P}(k,b)} (b-k)^a \Big) = \sum_{k=1}^{b} \Big( (-1)^{k-1} \binom{b}{k} (b-k)^a \Big) \ .$$

Une fonction $f : A \to B$ n'est sont *pas* surjective ssi $Im(f) \neq B$, ssi $f \in F_i$ pour un $i = 1, \ldots, b$, c.-à-d. ssi $f \in \bigcup_{i=1}^{b} F_i$. Donc l'ensemble des surjections $A \to B$ est $B^A \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{b} F_i\Big)$, et son cardinal vaut

$$b^a - \sum_{k=1}^{b} \Big( (-1)^{k-1} \binom{b}{k} (b-k)^a \Big) = (-1)^0 \binom{b}{0} (b-0)^a + \sum_{k=1}^{b} \Big( (-1)^k \binom{b}{k} (b-k)^a \Big) \ ,$$

ce qui donne (7).

**Proposition**: *Soit $A$ un ensemble avec $card(A) = m > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de fonctions $f : A \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{p \in A} f(p) = k$ est $\binom{k+m-1}{k} = \binom{k+m-1}{m-1}$.*

En effet, on peut écrire $A = \{p_1, \ldots, p_m\}$, et une telle fonction $f : A \to \mathbb{N}$ peut être codée comme un mot formé de croix $\times$ et de séparateurs $|$ comme suit: $f(p_1)$ fois $\times$, puis 1 fois $|$, puis $f(p_2)$ fois $\times$, puis 1 fois $|$, etc., et finalement $f(p_m)$ fois $\times$. On écrit cela $\times^{f(p_1)} \cdot \prod_{j=2}^{m} \big( \mid \ \cdot \times^{f(p_j)} \big)$. Un tel mot comporte $m-1$ occurrences de $|$ et $\sum_{j=1}^{m} f(p_j) = k$ occurrences de $\times$, il est de longueur $k+m-1$. Réciproquement, tout mot ayant $m-1$ occurrences de $|$ et $k$ occurrences de $\times$ code une et une seule fonction $f$ avec $\sum_{p \in A} f(p) = k$. Il faut donc compter le nombre de tels mots, il y a en fait $\binom{k+m-1}{m-1}$ choix pour les positions des occurrences de $|$, ou de façon équivalente, $\binom{k+m-1}{k}$ choix pour les positions des occurrences de $\times$.

Par exemple, pour $m = 5$, $k = 4$, $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = 0$, $f(p_3) = 2$, $f(p_4) = 0$ et $f(p_5) = 2$, le codage sera $\mid \ \mid \times \times \mid \ \mid \times \times$ .

Ce résultat permet de donner le nombre de monômes de degré $k$ en $m$ variables:

$$\prod_{j=1}^{m} X_j^{n_j} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j=1}^{m} n_j = k \ .$$

Un *multi-ensemble* est une variante d'ensemble, où chaque élément a une multiplicité. Il y a donc $\binom{k+m-1}{k} = \binom{k+m-1}{m-1}$ multi-ensembles de cardinal $k$ formés d'éléments d'un ensemble de cardinal $m$. Un tel multi-ensemble s'écrit $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$, où certains éléments $x_i$ peuvent être répétés ; il est aussi appelé *combinaison avec répétitions* de $k$ éléments parmi $m$.

Etant donnée une fonction $E \to V$, où $E$ est fini, l'*histogramme* de $f$ est la fonction $h_f : V \to \mathbb{N}$ donnée par

$$\forall v \in V, \qquad h_f(v) = card\big(\{p \in E \mid f(p) = v\}\big) \ ,$$

et cette fonction $h_f$ vérifie $\sum_{v \in V} h_f(v) = card(E)$. Pour $card(E) = e$ et $card(V) = v$, il y a en tout $\binom{e+v-1}{e} = \binom{e+v-1}{v-1}$ histogrammes différents.

Par exemple si on a une promotion de 80 étudiants, et que la note d'examen est un entier entre 0 et 20, cela donne $e = 80$ et $v = 21$, donc $\binom{100}{20}$ histogrammes de notes possibles.

Soient $m \geq 2$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ et $n = b_1 + \cdots b_m$ ; on appelle *coefficient multinomial de* $b_1, \ldots, b_m$ *dans* $n$, et on écrit $\binom{n}{b_1, \ldots, b_m}$, le nombre d'applications $f : A \to \{1, \ldots, m\}$, pour $card(A) = n$, telles que pour $i = 1 \ldots, m$, on a $card(f^{-1}(\{i\})) = b_i$ (il y a $b_i$ éléments $x$ de $A$ tels que $f(x) = i$). C'est également le nombre de $(m-1)$-uples $(B_1, \ldots, B_{m-1}) \in \mathcal{P}(A)^{m-1}$ tels que $card(B_i) = b_i$ pour $1 \leq i \leq m-1$, et $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $1 \leq i < j \leq m-1$. Notons que pour $m = 2$ on a

$$\binom{n}{p, n-p} = \binom{n}{p} \ .$$

**Proposition** : *Pour* $b_1 + \cdots + b_m = n$, *on a*

$$\binom{n}{b_1, \ldots, b_m} = \frac{n!}{b_1! \cdots b_m!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} b_i!} \ . \tag{8}$$

On la montre par récurrence sur $m$. Pour $m = 2$, il s'agit du nombre de parties de $A$ de cardinal $b_1$, et la formule donne effectivement $\binom{n}{b_1, b_2} = \binom{n}{b_1}$. Maintenant, supposons la vraie pour $m$, et montrons-la pour $m+1$. Une application $f : A \to \{1, \ldots, m+1\}$ telle que $card(f^{-1}(\{i\})) = b_i$ pour $i = 1 \ldots, m+1$ est donnée par le choix d'une partie $B$ de $A$ de cardinal $b_{m+1}$ sur laquelle $f(x) = m+1$, et ensuite d'une application $g : A \setminus B \to \{1, \ldots, m\}$ telle que $card(g^{-1}(\{i\})) = b_i$ pour $i = 1 \ldots, m$. Le nombre de choix est :

$$\binom{n}{b_{m+1}} \times \binom{n - b_{m+1}}{b_1, \ldots, b_m} = \frac{n!}{b_{m+1}!(n - b_{m+1})!} \times \frac{(n - b_{m+1})!}{\prod_{i=1}^{m} b_i!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m+1} b_i!} \ ,$$

ce qui donne la formule (8).

Etant donnés $m$ symboles $x_1, \ldots, x_m$, le nombre de mots de longueur $n = b_1 + \cdots + b_m$ comprenant $b_i$ occurrences du symbole $x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, est $\binom{n}{b_1, \ldots, b_{m-1}}$. Un tel mot est appelé *permutation avec répétitions* de $n$ éléments.

Le nombre total de $(m-1)$-uples $(B_1, \ldots, B_{m-1})$ de parties mutuellement disjointes de $A$, est égal au nombre d'applications $f : A \to \{1, \ldots, m\}$, à savoir $m^n$, en d'autres termes :

$$\sum_{b_1 + \ldots + b_m = n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} = m^n \ .$$

On peut généraliser l'identité binomiale de Newton comme suit ; pour $m \geq 2$,

$$(X_1 + \cdots + X_m)^n = \sum_{b_1 + \cdots + b_m = n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_m} X_1^{b_1} \cdots X_m^{b_m} \ . \tag{9}$$

Elle est prouvée par récurrence sur $m$. Pour $m = 2$, c'est l'identité binomiale. Supposons-la vraie pour $m$. Alors

$$
\begin{aligned}
&(X_1 + \cdots + X_{m+1})^n \\
&\quad = \big(X_1 + \cdots + (X_m + X_{m+1})\big)^n \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \binom{n}{b_1,\ldots,b_m} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} (X_m + X_{m+1})^{b_m} \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \binom{n}{b_1,\ldots,b_m} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} \left[\sum_{c+d=b_m} \binom{b_m}{c,d} X_m^c X_{m+1}^d\right] \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \sum_{c+d=b_m} \binom{n}{b_1,\ldots,b_m} \binom{b_m}{c,d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_m=n} \sum_{c+d=b_m} \binom{n}{b_1,\ldots,b_{m-1},c,d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \\
&\quad = \sum_{b_1+\cdots+b_{m-1}+c+d=n} \binom{n}{b_1,\ldots,b_{m-1},c,d} X_1^{b_1} \cdots X_{m-1}^{b_{m-1}} X_m^c X_{m+1}^d \ ,
\end{aligned}
$$

ce qui donne (9).