L3I COMBINATOIRE — 7 : EQUIVALENCES ET ORDRES

Christian RONSE, ICube, Département d'Informatique de l'Université de Strasbourg

Soit E un ensemble. Une *partition* de E est un ensemble $\pi \subseteq \mathcal{P}(E)$ de parties de E appelées *classes*, telles que :

(a) Chaque classe est non-vide : $\forall C \in \pi,\ C \neq \emptyset$.

(b) Les classes sont mutuellement disjointes : $\forall C, C' \in \pi,\ C \neq C' \ \Rightarrow\ C \cap C' = \emptyset$.

(c) L'ensemble des classes recouvre tout l'ensemble E : $\bigcup \pi = E$.

Une définition équivalente est que *l'ensemble vide $\emptyset$ n'est pas une classe et tout élément de E appartient à une et une seule classe.* Notons que si E est vide, l'unique partition de E est vide (il n'y a aucune classe). Par contre, pour $E \neq \emptyset$, une partition ne sera jamais vide (il y a au moins une classe), et les cas extrêmes de partitions sont la *partition universelle* $\{E\}$ (dont l'unique classe est tout l'ensemble) et la *partition identité* $\big\{\{x\} \mid x \in E\big\}$ (dont les classes sont les singletons). Citons d'autres exemples de partitions :

— celle de $\mathbb{Z}$ en 4 classes de congruence modulo 4 ;

— celle de $\mathbb{R}$ en les 2 classes des nombres ≥ 0 et des nombres < 0 ;

— étant donnés deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$, les ensembles $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$, où $b \in Im(f)$, constituent une partition de A.

Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, symétrique et transitive. Par exemple sur un ensemble quelconque E, l'égalité (ou identité) $=$ et la relation universelle $E \times E$ sont deux relations d'équivalence ; par ailleurs le parallélisme en est une sur l'ensemble des droites du plan euclidien, et la congruence modulo 4 en est une sur $\mathbb{Z}$.

Etant donnés un ensemble E et une relation d'équivalence R sur E, pour tout $x \in E$, on définit la *classe d'équivalence de x* par rapport à R comme l'ensemble

$$[x]_R = \{y \in E \mid y\ R\ x\} \ .$$

Notons que $x \in [x]_R$ (car $x\ R\ x$ par réflexivité). Pour $x, y \in E$, on a

$$y \in [x]_R \iff x \in [y]_R \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \iff [x]_R = [y]_R \ . \qquad (A)$$

En effet, $x \in [y]_R \ \Leftrightarrow\ x\ R\ y \ \Leftrightarrow\ y\ R\ x \ \Leftrightarrow\ y \in [x]_R$ (par symétrie) ; dans ce cas pour $z \in [x]_R$, on a $z\ R\ x$ et $x\ R\ y$, donc $z\ R\ y$ (par transitivité), c.-à-d. $z \in [y]_R$, ainsi $[x]_R \subseteq [y]_R$; de même on aura $[y]_R \subseteq [x]_R$, d'où $[x]_R = [y]_R$. Réciproquement, si $[x]_R = [y]_R$, comme $x \in [x]_R$, on a $x \in [y]_R$. Enfin, si $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, alors pour $z \in [x]_R \cap [y]_R$, on a $[x]_R = [z]_R = [y]_R$; réciproquement, si $[x]_R = [y]_R$, alors $x \in [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$.

Soit $E/R = \{[x]_R \mid x \in E\}$ *l'ensemble des classes d'équivalence de R.* Par exemple dans $\mathbb{Z}$, les classes d'équivalence de la relation $\overset{n}{\equiv}$ de congruence modulo n sont les n classes de congruence modulo n, qui sont $[0]_{\overset{n}{\equiv}}, \ldots [n-1]_{\overset{n}{\equiv}}$. On a le résultat suivant :

Théorème : *Pour toute relation d'équivalence R sur E, E/R est une partition de E. Réciproquement, toute partition de E est l'ensemble E/R pour une unique relation d'équivalence R sur E.*

En effet, comme $x \in [x]_R$ pour tout $x \in E$, les classes $[x]_R$ sont toutes non-vides et elles recouvrent E : $\bigcup_{x \in E} [x]_R = E$. Si $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, alors $[x]_R = [y]_R$ par (A), donc les classes sont mutuellement disjointes. Ceci montre que E/R est une partition. Si $E/R = E/S$ pour deux relations d'équivalence R et S, alors pour tout $x \in E$, $[x]_S \in E/R$, donc $[x]_S = [y]_R$ pour un $y \in E$, et comme $x \in [x]_S = [y]_R$, on a $[y]_R = [x]_R$ par (A), donc $[x]_S = [x]_R$, ce qui signifie que pour tout $y \in E$, $y\ R\ x \ \Leftrightarrow\ y\ S\ x$, donc $R = S$. Enfin, pour toute partition π de E, on définit la relation R sur E

par $x\ R\ y \ \Leftrightarrow\ \big[\exists C \in \pi,\ x, y \in C\big]$. On vérifie que R est une relation d'équivalence : elle est réflexive (comme $\bigcup \pi = E$, pour $x \in E$, $\exists C \in \pi$ avec $x \in C$), symétrique (par définition) et transitive (si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$, $\exists C, C' \in \pi$ avec $x, y \in C$ et $y, z \in C'$, ainsi $y \in C \cap C'$, donc $C = C'$ et $x, z \in C$, ce qui donne $x\ R\ z$). On a alors $E/R = \pi$, car pour tout $x \in E$, $[x]_R$ est l'unique classe $C \in \pi$ telle que $x \in C$.

On a donc une bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence sur E et celui des partitions de E. Ainsi les notions de relation d'équivalence et de partition représentent la même chose.

Les partitions sont ordonnées par *raffinement*. Etant données deux partitions π_1 et π_2 de E, on dit que π_1 *est plus fine que* π_2, ou que π_2 *est plus grossière que* π_1, si toute classe de π_1 est incluse dans une classe de π_2 : $\forall B \in \pi_1$, $\exists C \in \pi_2$, $B \subseteq C$; de façon équivalente, toute classe de π_2 est l'union d'une ou plusieurs classes de π_1. L'ordre de raffinement sur les partitions correspond à l'ordre d'inclusion sur les relations d'équivalence : pour deux relations d'équivalence R et S, $R \subseteq S$ si et seulement si E/R est plus fine que E/S.

La partition la plus fine est la partition identité $\big\{\{x\} \mid x \in E\big\}$, tandis la plus grossière est la partition universelle $\{E\}$; elles correspondent à la plus petite et la plus grande relation d'équivalence, à savoir l'égalité (ou identité) $=$ et la relation universelle $E \times E$.

Une intersection de relations d'équivalence sur E sera à nouveau une relation d'équivalence. Etant donnée une relation R sur E, l'intersection de toutes les relations d'équivalence sur E qui contiennent R sera la plus petite relation d'équivalence sur E contenant R ; on l'appelle la *relation d'équivalence engendrée par* R. Elle peut être construite explicitement comme suit :

$$(R \cup R^{-1})^* = (Id \cup R \cup R^{-1})^+ = Id \cup (R \cup R^{-1})^+ = \bigcup_{n \in N^*} (Id \cup R \cup R^{-1})^n = Id \cup \bigcup_{n \in N^*} (R \cup R^{-1})^n \ .$$

En effet, $R \cup R^{-1}$ est la plus petite relation symétrique contenant R, donc sa fermeture réflexive et transitive $(R \cup R^{-1})^* = (Id \cup R \cup R^{-1})^+ = Id \cup (R \cup R^{-1})^+$ sera réflexive et transitive, tout en restant symétrique. Par exemple, si on définit sur $\mathbb{Z}$ la relation R par $x\ R\ y \ \Leftrightarrow\ y = x + 2$, la plus petite relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ contenant R est la congruence modulo 2.

Un *ordre large* est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive ; un *ordre strict* est une relation irréflexive et transitive. Par exemple :

- Sur $\mathbb{R}$, les relations $\leq$ et $\geq$ sont des ordres larges, tandis que $<$ et $>$ sont des ordres stricts.
- Sur l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A, les relations $\subseteq$ et $\supseteq$ sont des ordres larges, tandis que $\subset$ et $\supset$ sont des ordres stricts.
- La relation "est un diviseur de", notée $|$, est un ordre large sur $\mathbb{N}$; ce n'en est pas un sur $\mathbb{Z}$, parce que z et $-z$ sont diviseurs l'un de l'autre.
- Considérons les mots sur un alphabet A. Le mot M de longueur m est un préfixe du mot N si M est formé des m premières lettres de N ; par exemple pour les mots sur l'alphabet usuel $\{a, \ldots, z\}$, le mot *chat* est préfixe de *chatouiller*. Cette relation est un ordre large.

Notons qu'un ordre strict S vérifie une forme renforcée d'antisymétrie : pour $a, b \in E$, on ne peut avoir simultanément $a\ S\ b$ et $b\ S\ a$ (sinon par transitivité on aurait $a\ S\ a$, ce qui contredit l'irréflexivité).

Nous avons vu précédemment qu'il y a une bijection entre relations réflexives et irréflexives, une relation réflexive R et une relation irréflexive S correspondent par $R = Id \cup S$ et $S = R \setminus Id$, c.-à-d. $a\ R\ b$ ssi $a\ S\ b$ ou $a = b$, et $a\ S\ b$ ssi $a\ R\ b$ et $a \neq b$. Cette bijection fait correspondre les ordres larges avec les ordres stricts. Donc on considèrera toujours un ordre large $\preceq$ avec l'ordre strict correspondant $\prec$, qui se définissent l'un l'autre par

$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad \big[a \prec b \quad \text{ou} \quad a = b\big] \qquad \text{et} \qquad a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad \big[a \preceq b \quad \text{et} \quad a \neq b\big] \ .$$

On parlera donc en général d'une relation d'ordre et on dira que E est un *ensemble ordonné*. Quand il n'y a pas de confusion possible avec l'ordre numérique sur $\mathbb{R}$, on pourra écrire un ordre large par $\leq$ et l'ordre strict correspondant par $<$, avec des variantes possibles comme $\subseteq$ ou $\preceq$ pour l'ordre large et $\subset$ ou $\prec$ pour l'ordre strict ; les négations de ces relations seront alors écrites $\not\leq$ et $\not<$ (ou $\not\subseteq$, $\not\preceq$, $\not\subset$, $\not\prec$).

La relation inverse d'un ordre large $\leq$ est un ordre large noté $\geq$, donc $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$. L'ordre strict correspondant à $\geq$ est l'inverse $>$ de l'ordre strict $<$ correspondant à $\leq$. On notera aussi $\supseteq$, $\succeq$, $\supset$ et $\succ$ pour les inverses de $\subseteq$, $\preceq$, $\subset$ et $\prec$.

Deux éléments a et b de E sont *comparables* pour l'ordre $\leq$ si on a $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. On dit que l'ordre est *total* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables ; on dit alors que l'ensemble E est *totalement ordonné* et que E est une *chaîne*. Par exemple l'ordre numérique $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est total. Si l'ordre sur E n'est pas total (ou si sa totalité n'est pas garantie), on dira que c'est un ordre *partiel* et que E est *partiellement ordonné*. Par exemple, pour un ensemble A de cardinal au moins 2, l'ordre sur $\mathcal{P}(A)$ donné par l'inclusion est partiel, parce que pour $a, b \in A$ avec $a \neq b$, $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables : $\{a\} \not\subset \{b\}$, $\{a\} \neq \{b\}$ et $\{a\} \not\supset \{b\}$. L'ordre préfixe sur les mots est partiel, deux mots commençant par des lettres différentes ne sont pas préfixes l'un de l'autre.

Etant donnés un ensemble A ordonné par $\leq$ et un ensemble B ordonné par $\preceq$, un *isomorphisme* de $(A, \leq)$ sur $(B, \preceq)$ est une bijection $f : A \to B$ telle que pour $a, a' \in A$, on a $a \leq a' \Leftrightarrow f(a) \preceq f(a')$. Par exemple $\{1, 2, 3, 6\}$ ordonné par la relation $\mid$ est isomorphe à $\mathcal{P}(\{a, b\})$ (où $a \neq b$), l'isomorphisme est donné par $1 \mapsto \emptyset$, $2 \mapsto \{a\}$, $3 \mapsto \{b\}$ et $6 \mapsto \{a, b\}$; cela se voit sur le diagramme suivant, où les flèches correspondent à l'ordre strict :

$$
\begin{tikzcd}
& 6 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
& 1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& \{a,b\} & \\
\{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\
& \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Soit E un ensemble ordonné par $\leq$. Un élément a de E est *minimal* si pour tout $x \in E$ on a $x \not< a$, et *maximal* si pour tout $x \in E$ on a $x \not> a$; il est *minimum* si pour tout $x \in E$ on a $x \geq a$, et *maximum* si pour tout $x \in E$ on a $x \leq a$. Notons qu'un minimum, s'il existe, est unique, et est alors l'unique élément minimal ; en effet, si a est un minimum de E, pour tout $b \in E$ tel que $b \neq a$, on aura $a < b$, donc b n'est pas minimal, et ainsi $b \not\leq a$, donc b n'est pas minimum, ce qui implique que $x \not< a$ pour tout $x \in E$, donc a est minimal. De même, un maximum, s'il existe, est unique, et est alors l'unique élément maximal. Par contre, en l'absence de minimum (resp., maximum), il peut y avoir aucun, un ou plusieurs éléments minimaux (resp., maximaux). Par exemple :

— Dans $\mathcal{P}(A)$ ordonné par l'inclusion, $\emptyset$ est le minimum tandis que A est le maximum.

— Dans $\mathbb{N}$ ordonné par $\mid$, 1 est le minimum et 0 est le maximum.

— Dans $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}$ ordonné par l'inclusion, les éléments minimaux sont les singletons, et les éléments maximaux sont les compléments des singletons.

— Dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$ ordonné par $\mid$, les éléments minimaux sont les nombres premiers, mais aucun n'est minimum ; il n'y a aucun élément maximal donc pas de maximum.

— Dans $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ ordonné par $\mid$, les éléments 2 et 3 sont minimaux, tandis que 4, 6 et 9 sont maximaux ; il n'y a ni minimum ni maximum.

— $\mathbb{Z}$, avec l'ordre numérique, n'a aucun élément minimal ou maximal (donc aucun minimum ou maximum).

— Dans $\mathbb{Z} \cup \{0', 1'\}$ avec l'ordre numérique usuel sur $\mathbb{Z}$, et $0' < 1'$, $0'$ est l'unique élément minimal, mais il n'est pas minimum, tandis que $1'$ est l'unique élément maximal, mais il n'est pas maximum.

Dans une chaîne, la négation de $<$ est $\geq$ et celle de $>$ est $\leq$, donc un élément est minimal si et seulement s'il est le minimum (unique), et il est maximal si et seulement s'il est le maximum (unique).

Dans un ensemble ordonné *fini* non vide E, il existe un élément minimal. En effet, on choisit $x_0 \in E$; si x_0 n'est pas minimal, on choisit $x_1 \in E$ tel que $x_1 < x_0$; si x_1 n'est pas minimal, on choisit $x_2 \in E$ tel que $x_2 < x_1$, etc. ; la suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ doit s'arrêter en un élément minimal. De même E contient un élément maximal.

Une chaîne *finie* E de cardinal n est isomorphe à $n = \{0, \ldots, n-1\}$ (avec l'ordre numérique). En d'autres termes, on peut écrire les éléments de E sous la forme $x_0, \ldots x_{n-1}$, avec $x_i \leq x_j \;\Leftrightarrow\; i < j$. On le prouve par induction. Pour $n = 0$, $E = \emptyset = \{\} = 0$, et l'ordre est vide. Supposons la propriété vraie pour n, et montrons-la pour $n+1$. Si $card(E) = n+1$, on prend $x_n \in E$ maximal, donc maximum. Comme $card(E \setminus \{x_n\}) = n$ et $E \setminus \{x_n\}$ est toujours une chaîne, il est isomorphe à $n = \{0, \ldots, n-1\}$. On étend cet isomorphisme à un isomorphisme entre E et $n+1 = \{0, \ldots, n\}$, en faisant correspondre x_n avec n.

Etant donné un ensemble *fini* E avec un ordre partiel $\leq$, il existe un ordre total $\preceq$ sur E qui contient $\leq$, c.-à-d. pour $a, b \in E$, $a \leq b \;\Rightarrow\; a \preceq b$. C'est ce qu'on appelle le *tri topologique*. Notons que si $card(E) = n$, l'ordre total sur E est isomorphe à $n = \{0, \ldots, n-1\}$, ce qui signifie qu'on peut écrire les éléments de E sous la forme $x_0, \ldots x_{n-1}$, avec $x_i \prec x_j \;\Leftrightarrow\; i < j$. Donc le tri topologique signifie qu'on a la suite $x_0, \ldots x_{n-1}$ avec $x_i < x_j \;\Rightarrow\; i < j$. La preuve de l'existence de ce tri se fait par induction sur le cardinal de E, de façon assez semblable à celle pour la chaîne dans le paragraphe précédent. Il existe un algorithme efficace pour faire un tri topologique, il se base sur un *parcours en profondeur*.

Le tri topologique peut s'appliquer à l'ordonnancement dans le temps de tâches qui sont partiellement ordonnées par une relation de précédence. Un exemple amusant : quand on s'habille, il existe un ordre partiel de précédence entre les vêtements (caleçon avant pantalon, chaussettes avant chaussures, chemise avant pull, etc.) ; le tri topologique consiste à donner un ordre chronologique entre les vêtements, compatible avec cet ordre de précédence. Plus sérieusement, on peut utiliser le tri topologique pour l'ordonnancement temporel de processus informatiques par un système d'exploitation, où on a une relation de précédence acyclique entre processus : a précède b si l'exécution de b requiert le résultat de a.

Soient deux ensembles ordonnés A et B (on écrira $\leq$ pour l'ordre tant sur A que sur B). On peut ordonner le produit cartésien $A \times B$ de deux manières. Tout d'abord l'*ordre produit* ou *ordre par composantes* est donné par

$$(a, b) \leq (a', b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big[a \leq a' \quad \text{et} \quad b \leq b'\big] \;.$$

En statistiques, cet ordre est appelé ordre *marginal*. Pour A et B ayant tous deux un cardinal ≥ 2, cet ordre ne sera jamais total. Ce produit est associatif, dans le sens que pour 3 ensembles A, B et C, l'ordre produit sur $A \times (B \times C)$ coïncide avec celui sur $(A \times B) \times C$. Si on fait un produit sur n ensembles $A_1, \ldots, A_n$, l'ordre sur $A_1 \times \cdots \times A_n$ sera alors donné par

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (a'_1, \ldots, a'_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big[\forall i = 1, \ldots, n, \quad a_i \leq a'_i\big] \;.$$

L'autre manière d'ordonner le produit $A \times B$ est l'*ordre lexicographique* donné par

$$(a, b) < (a', b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(a < a' \quad \text{ou} \quad \big[a = a' \quad \text{et} \quad b < b'\big]\Big) \;.$$

L'intérêt de cet ordre est que quand A et B sont des chaînes, le produit $A \times B$ avec l'ordre lexicographique sera aussi une chaîne. Par exemple quand on lit un livre, on peut coder chaque position d'un caractère par le couple formé de son numéro de ligne (croissant de haut en bas) et de son numéro de colonne (croissant de gauche à droite), et l'ordre de lecture sera lexicographique. Ce produit est à nouveau associatif, dans le sens que pour 3 ensembles A, B et C, l'ordre lexicographique sur $A \times (B \times C)$ coïncide avec celui sur $(A \times B) \times C$. Pour un produit $A_1 \times \cdots \times A_n$ de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$, l'ordre lexicographique sera alors donné par

$$(a_1, \ldots, a_n) < (a'_1, \ldots, a'_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_i < a'_i \quad \text{et} \quad \big[\forall j < i, \quad a_j = a'_j\big]\Big) \ .$$

Par exemple la comparaison de deux entiers avec n chiffres décimaux se fait par l'ordre lexicographique : on regarde la position la plus à gauche où les chiffres diffèrent. L'ordre des mots d'un dictionnaire est une combinaison de l'ordre lexicographique et de l'ordre préfixe.