Université de Strasbourg **UFR de Mathématique et d'Informatique**
L2 Informatique/CMI S4 **2018-2019, semestre de printemps**

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 21 mars 2019

Durée : 1 heure
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents (papier) autorisés mais non partagés — Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Soit $n > 2$ et soit B^n l'ensemble des mots booléens (chaînes de symboles 0 ou 1) de longueur n. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur B^n : pour $m_0, m_1 \in B^n$, $m_0 \mathcal{R} m_1$ si m_1 est obtenu en complémentant (au sens booléen) deux symboles du mot m_0 ; plus précisément :

$$m_0 = c_1 \cdots c_n, \quad m_1 = d_1 \cdots d_n, \quad (c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots d_n \in \{0,1\}),$$
$$\exists\, i, j,\ 1 \leq i < j \leq n, \quad d_i = \overline{c_i}, \quad d_j = \overline{c_j}, \quad d_t = c_t \text{ pour } t \neq i, j.$$

Par exemple pour $n = 5$, $\mathit{0}\mathbf{1}\mathit{1}\mathbf{0}\mathit{1} \mathrel{\mathcal{R}} \mathit{0}\mathbf{0}\mathit{1}\mathbf{1}\mathit{1}$ (2e et 4e symboles complémentés entre les deux mots). Soit $\mathcal{R}^+$ la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

(*i*) Pour $m_0, m_1 \in B^n$, à quelle condition a-t-on $m_0 \mathcal{R}^+ m_1$?

(*ii*) $\mathcal{R}^+$ est-elle une relation d'équivalence ?

(*iii*) Pour $m \in B^n$, quel est le plus petit $s > 0$ tel que $m \mathcal{R}^s m$?

(2) Huit tâches $T_1, \ldots, T_8$ doivent être réparties entre cinq volontaires $V_1, \ldots, V_5$ suivant les règles suivantes :

— chaque tâche est attribuée à un unique volontaire ;

— chaque volontaire se voit attribuer une ou deux tâches.

Donner le nombre possibles de répartitions, sachant que les tâches sont toutes distinctes (les volontaires aussi), et que pour un volontaire ayant deux tâches, l'ordre entre les deux n'est pas pris en compte.

Indication : calculer d'abord le nombre de façons de sélectionner les volontaires ayant deux tâches, ensuite pour une telle sélection, calculer le nombre de répartitions des tâches.