Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L3 Informatique S5 et L3 CMI **2017-2018, semestre d'automne**

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 20 octobre 2017

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés — Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Une association tient une permanence pendant **7** jours et elle a besoin chaque jour d'une personne pour l'assurer. Elle a trouvé des volontaires : *André* assurera **3** jours de permanence, *Bertrand* assurera **2** jours et *Charles* **2** jours $(3 + 2 + 2 = 7)$. **Question :** De combien de manières peut-on affecter les 7 jours aux volontaires dans chacun des cas suivants ?

(i) Les jours de permanence de chacun peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre.

(ii) Les jours de permanence d'André doivent être consécutifs ; les jours de Bertrand, ainsi que ceux de Charles, peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre.

(iii) Les jours de permanence d'André, ainsi que ceux de Bertrand, doivent être consécutifs ; les jours de Charles peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre.

(iv) Les jours de permanence de chacun doivent être consécutifs.

Indication : des jours de permanence pris indépendamment l'un de l'autre constituent autant de périodes, mais plusieurs jours consécutifs à assurer par une même personne constituent une seule (longue) période.

(2) On définit sur $\mathbb{Z}^2$ (l'ensemble des couples d'entiers relatifs) la relation binaire R comme suit :

$$(a, b)\ R\ (x, y) \quad \text{SSI} \quad \big[\ (x, y) = (a, b + 1) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (a + 1, b)\ \big]\ .$$

Questions :

(i) Décrire R^2 et R^{-2}.

(ii) Soit $f : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$ (la fonction définie sur les couples d'entiers relatifs, à valeurs booléennes) donnée par $f(x, y) = (x + y)\ MOD\ 2$ (reste de la division entière de $x + y$ par 2). Que peut-on dire de $f(a, b)$ et $f(x, y)$ quand $(a, b)\ R\ (x, y)$? quand $(a, b)\ R^2\ (x, y)$?

(iii) Décrire la relation d'équivalence engendrée par R^2 et donner ses classes d'équivalence.

(3) Soit E un ensemble quelconque, et soient $f, g : E \to E$ telles que $f \circ g \circ f = g \circ f \circ g = Id_E$ (deux fonctions f et g telles que les compositions f après g après f, et g après f après g, donnent l'identité). **Questions :**

(i) f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(ii) Quelle relation y a-t-il entre f et g ?