

**UFR de Mathématiques et d'Informatique**  
**L3 Informatique S5, 2016-2017, semestre de printemps**

**Probabilités, Statistiques et Combinatoire**

**Contrôle Continu de Combinatoire, 27 février 2017**

Durée : 1 heure

*Tous documents (papier) autorisés mais non partagés*

*Calculatrices inutiles*

*Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

**Justifier soigneusement les réponses**

(1) Une association assure 9 jours de permanence avec l'aide de 3 bénévoles, Jules, Marie et Pierre. Donner le nombre de répartitions possibles des 9 jours entre les 3 bénévoles dans chacun des cas suivants :

(i) Jules assure 3 jours, Marie assure 4 jours et Pierre assure 2 jours.

(ii) Jules assure 3 jours, Marie assure 4 jours et Pierre assure 2 jours *consécutifs*.

(iii) Jules assure *au maximum* 4 jours, Marie assure *au maximum* 5 jours et Pierre assure *exactement* 2 jours.

NB. Dans chaque cas, il suffit de donner les formules, il n'est pas nécessaire d'en calculer la valeur arithmétique.

(2) Soit  $E$  un ensemble *fini* et soit  $f : E \rightarrow E$ . Que peut-on dire de la hauteur  $h(x)$  (pour  $f$ ) d'un élément  $x$  de  $E$  quand  $f$  est injective ou surjective ?

(3) Soit  $Q$  un ensemble ordonné par la relation d'ordre large  $\leq$ , avec la relation d'ordre strict correspondante  $<$ . Soit  $P$  un ensemble et deux applications  $f, g : P \rightarrow Q$ . On définit la relation binaire  $\prec$  sur  $P$  comme suit :

$$\forall x, y \in P, \quad x \prec y \iff \left( f(x) < f(y) \quad \text{OU} \quad [f(x) = f(y) \text{ ET } g(x) < g(y)] \right) .$$

(i) Montrer que  $\prec$  est une relation d'ordre strict sur  $P$ .

Soit  $\preceq$  la relation d'ordre large correspondant à  $\prec$ , et soit  $\models$  la relation sur  $P$  définie comme suit :

$$\forall x, y \in P, \quad x \models y \iff \left( f(x) < f(y) \quad \text{OU} \quad [f(x) = f(y) \text{ ET } g(x) \leq g(y)] \right) .$$

(ii) Comparer  $\preceq$  à  $\models$  ; l'une est-elle incluse dans l'autre ?

(iii) Soient  $x, y \in P$  tels que  $x \neq y$ ,  $f(x) = f(y)$  et  $g(x) = g(y)$  ; comment  $x$  et  $y$  sont-ils liés pour les relations  $\preceq$  et  $\models$  ?