

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 14 octobre 2016

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 4$; soit \mathcal{X} l'ensemble de toutes les parties de E de cardinal 3 :

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq E \mid \text{card}(A) = 3\} .$$

On définit la relation binaire \mathcal{S} sur \mathcal{X} qui lie deux éléments de \mathcal{X} si leur intersection est une paire :

$$\forall A, B \in \mathcal{X}, \quad A \mathcal{S} B \iff \text{card}(A \cap B) = 2 .$$

Par exemple pour $a, b, c, d \in E$ mutuellement distincts, $\{a, b, c\} \mathcal{S} \{b, c, d\}$.

(a) Soient $A, B \in \mathcal{X}$; donner le plus petit $k > 0$ tel que $A \mathcal{S}^k B$ dans les cas suivants :

(i) $A = B$.

(ii) $n \geq 5$ et $\text{card}(A \cap B) = 1$.

(iii) $n \geq 6$ et $A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints).

(b) Pour $n \geq 6$, donner la décomposition la plus courte possible de \mathcal{S}^* , la fermeture réflexive et transitive de \mathcal{S} , en termes d'union de \mathcal{S}^k , $k \in \mathbb{N}$.

(2) Pour un naturel n , soit $f(n)$ le nombre d'affectations possibles de $2n$ journées de permanence à n bénévoles, où chaque bénévole assure 2 journées de permanence. Par exemple pour $n = 3$, une affectation possible est :

Jour 1 : Jules ; Jour 2 : Marie ; Jour 3 : Jules ; Jour 4 : Pierre ; Jour 5 : Pierre ; Jour 6 : Marie.

(i) Donner $f(0)$ et $f(1)$.

(ii) Exprimer $f(n+1)$ en fonction de n et $f(n)$.

(iii) Donner une formule pour $f(n)$, obtenue par récurrence sur n .

(3) On considère quatre applications $f, g, h, k : E \rightarrow E$. Si $f \circ g \circ h \circ f$ et $k \circ h \circ g \circ k$ sont des bijections, que peut-on dire de f , g , h et k ?