

UFR de Mathématiques et d'Informatique
L3 Informatique S5, 2015-2016, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 22 février 2016

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 5$; soit \mathcal{X} l'ensemble de toutes les parties de E de cardinal 3 :

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq E \mid \text{card}(A) = 3\} .$$

On définit la relation binaire \mathcal{S} sur \mathcal{X} qui lie deux éléments de \mathcal{X} si leur intersection est un singleton :

$$\forall A, B \in \mathcal{X}, \quad A \mathcal{S} B \iff \text{card}(A \cap B) = 1 .$$

Par exemple pour $a, b, c, d, e \in E$ mutuellement distincts, $\{a, b, c\} \mathcal{S} \{a, d, e\}$.

(i) Pour $A \in \mathcal{X}$, donner le plus petit $k > 0$ tel que $A \mathcal{S}^k A$.

(ii) Pour $A, B \in \mathcal{X}$ tels que $\text{card}(A \cap B) = 2$, donner le plus petit $k > 0$ tel que $A \mathcal{S}^k B$.

(iii) Pour $A, B \in \mathcal{X}$ disjoints ($A \cap B = \emptyset$), donner le plus petit $k > 0$ tel que $A \mathcal{S}^k B$, dans le cas où $n \geq 7$.

(iv) Même chose, dans le cas où $n = 6$.

(v) Décrire \mathcal{S}^+ , la fermeture transitive de \mathcal{S} ; est-elle réflexive ? symétrique ?

NB : Vous pouvez vous aider de dessins : $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ ou diagrammes de Venn.

(2) On a un jeu de cartes ordinaire comprenant 52 cartes de 13 figures (1, ..., 10, valet J, dame Q et roi K) dans chacune des 4 couleurs (coeur ♡, carreau ♦, trèfle ♣ et pique ♠). On appelle une *donne* un choix de 5 cartes *non ordonnées*. Donner une formule pour le nombre de donnes où les 5 figures sont mutuellement distinctes et où on a les 4 couleurs.

(3) Soit E un ensemble fini, $f : E \rightarrow E$ et $x \in E$. On a $f^4(x) = f^{10}(x) = f^{19}(x)$ et $f^3(x) \neq f^6(x) \neq f^4(x)$. Donner la hauteur et la période de x .