UFR de Mathématique et d'Informatique
L3 Informatique S5, 2015-2016, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 8 octobre 2015

Durée : 1 heure

Tous documents (papier) autorisés mais non partagés

Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifier soigneusement les réponses

(1) Soit k un entier > 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g(k,n)$ le nombre de partitions de kn objets *distinguables* en n groupes mutuellement disjoints, chacun formé de k objets.

(i) Donner $g(k,0)$ et $g(k,1)$.

(ii) Étant donnés $k(n+1)$ objets, on identifie un objet particulier X (le premier dans la liste). Combien de choix y a-t-il pour former le groupe de k objets contenant X ? Quand X a été mis dans un groupe de k, combien y a-t-il de partitions en n groupes mutuellement disjoints de k objets pour les kn objets restants ? En déduire la relation de récurrence entre $g(k,n)$ et $g(k,n+1)$.

(iii) Montrer que pour $n > 0$, $g(k,n) = \prod_{t=0}^{n-1} \binom{tk+k-1}{k-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = 0$?

(iv) Déduire que pour $n > 1$, $g(k,n) = \prod_{t=1}^{n-1} \binom{tk+k-1}{k-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = 0$ et $n = 1$?

(v) Que vaut $g(1,n)$?

(2) Quelles sont les relations d'équivalence qui sont en même temps des relations d'ordre (large) ?

(3) Soient R et S deux relations sur $\mathbb{N}^3$ données par

$$\begin{aligned} \forall\, a,b,c,x,y,z \in \mathbb{N}, \quad & (a,b,c)\; R\; (x,y,z) \iff (x,y,z) = (a+1, b, c+1) \\ \text{et} \quad & (a,b,c)\; S\; (x,y,z) \iff (x,y,z) = (a, b+1, c+1)\ . \end{aligned}$$

(i) Comparer RS et SR.

(ii) Décrire R^*, S^* et $(R \cup S)^*$, les fermetures réflexives et transitives de R, S et $R \cup S$.