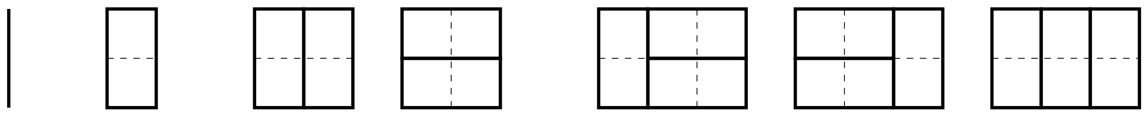
UFR de Mathématique et d'Informatique
L3 Informatique S5, 2014-2015, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 6 octobre 2014

Corrigé

(1) (i) Nous illustrons ci-dessous tous les pavages possibles d'un rectangle $2 \times n$ pour $n = 0, 1, 2, 3$:



Donc $C(0) = 1$, $C(1) = 1$, $C(2) = 2$ et $C(3) = 3$.

(ii) On peut placer un domino 1×2 dans le coin inférieur gauche du rectangle $2 \times (n+2)$ de deux manières :

- verticalement ; alors il recouvre le coin supérieur gauche, et il reste un rectangle $2 \times (n+1)$ qu'on peut paver de $C(n+1)$ manières différentes ; voir ci-dessous à gauche.
- horizontalement ; alors pour recouvrir le coin supérieur gauche, il faut y placer un domino 1×2 horizontalement, et il reste un rectangle $2 \times n$ qu'on peut paver de $C(n)$ manières différentes ; voir ci-dessous à droite.

Ces deux manières sont exclusives et donnent tous les pavages, donc $C(n+2) = C(n) + C(n+1)$.

(iii) On a $C(0) = C(1) = 1$, $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C(n+2) = C(n) + C(n+1)$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C(n) = F_n$. Cela se montre par récurrence : d'abord l'égalité est vérifiée pour 0 et 1, $C(0) = 1 = F_0$ et $C(1) = 1 = F_1$; ensuite, si l'égalité est vérifiée pour n et $n+1$, $C(n) = F_n$ et $C(n+1) = F_{n+1}$, il s'ensuit que $C(n+2) = C(n) + C(n+1) = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, ainsi l'égalité sera aussi vérifiée pour $n + 2$.

(2) Supposons que (i) R est symétrique et transitive. Soit X le domaine de définition de R, c.-à-d. l'ensemble des points de E origines ou destinations de flèches de R :

$$X = \{x \in E \mid \exists\, y \in E,\ x \mathrel{R} y \text{ ou } y \mathrel{R} x\} \ .$$

Comme R est symétrique et transitive sur E, par restriction elle le sera sur X. Pour $x \in X$, on a :

- soit $y \in E$ avec $x \mathrel{R} y$; par symétrie, $y \mathrel{R} x$, et par transitivité, $x \mathrel{R} y \mathrel{R} x$ implique $x \mathrel{R} x$.
- soit $y \in E$ avec $y \mathrel{R} x$; par symétrie, $x \mathrel{R} y$, et par transitivité, $x \mathrel{R} y \mathrel{R} x$ implique $x \mathrel{R} x$.

Donc R (définie sur X, symétrique et transitive sur X) est aussi réflexive sur X, ainsi (ii) R est une relation d'équivalence sur X. Cet ensemble X est unique, car R est réflexive sur X, mais pas en dehors de X :

$$X = \{x \in E \mid x \; R \; x\} \ .$$

Supposons que (ii) R est définie sur un sous-ensemble X de E et est une relation d'équivalence sur X.

- Pour $x, y \in E$, si $x \; R \; y$, comme R est définie sur X, on a $x, y \in X$, et la symétrie de R sur X donne $y \; R \; x$; par conséquent R est symétrique sur E.
- Pour $x, y, z \in E$, si $x \; R \; y$ et $y \; R \; z$, comme R est définie sur X, on a $x, y, z \in X$, et la transitivité de R sur X donne $x \; R \; z$; par conséquent R est transitive sur E.

On obtient ainsi (i).

(3) Il s'agit de répartir 10 tickets indiscernables parmi 4 types de gain. Sur un tableau on place 3 séparateurs $|$ qui le divisent en 4 colonnes correspondant aux 4 types de gain. Chaque fois qu'un des 10 tickets donne un type de gain, on place une croix $\times$ dans la colonne correspondante. Il s'agit donc de répartir 10 croix $\times$ et 3 séparateurs $|$ sur 13 positions. Le nombre de possiblités est ainsi :

$$\binom{13}{3} = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!\,3!} \ .$$