UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S5 et S6, 2013-2014, semestre d'automne

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, octobre 2013

Corrigé

(1) On fait le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
&x_1 \geq -2 \;:\quad \text{soit } y_1 = x_1 + 2 \;,\quad \text{donc } y_1 \geq 0 \;;\\
&x_2 \geq +3 \;:\quad \text{soit } y_2 = x_2 - 3 \;,\quad \text{donc } y_2 \geq 0 \;;\\
&x_3 \geq -1 \;:\quad \text{soit } y_3 = x_3 + 1 \;,\quad \text{donc } y_3 \geq 0 \;;\\
&x_4 \geq +5 \;:\quad \text{soit } y_4 = x_4 - 5 \;,\quad \text{donc } y_4 \geq 0 \;;\\
&x_5 \geq -4 \;:\quad \text{soit } y_5 = x_5 + 4 \;,\quad \text{donc } y_5 \geq 0 \;;\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40 \;,\quad \text{donc } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 40 + 2 - 3 + 1 - 5 + 4 = 39 \;.
\end{aligned}$$

Le problème revient à répartir 39 unités entre 5 variables, c.-à-d. répartir 39 boules et 4 séparateurs parmi $39 + 4 = 43$ places, le nombre de possibilités est

$$\binom{43}{4} = \binom{43}{39} \;.$$

(2) Une composition d'injections est une injection ; donc si f est injective, comme $f^{n+1} = f \circ f^n$, on obtient alors par récurrence sur n que f^n est injective pour tout $n \geq 1$. De même, une composition de surjections est une surjection ; donc si f est surjective, alors f^n est surjective pour tout $n \geq 1$.
$(i) \Rightarrow (iv)$: Si f est injective, alors f^5 est injective, donc elle a un inverse à gauche g : $g \circ f^5 = Id_E$. Comme $f^8 = f^5$, on obtient :

$$f^3 = Id_E \circ f^3 = (g \circ f^5) \circ f^3 = g \circ (f^5 \circ f^3) = g \circ f^8 = g \circ f^5 = Id_E \;.$$

Une autre façon de le montrer est que $\forall\, x \in E$, $f^5(x) = f^8(x) = f^5(f^3(x))$, et comme f^5 est injective, on obtient $f^3(x) = x$, donc $f^3 = Id_E$.
$(ii) \Rightarrow (iv)$: Si f est surjective, alors f^5 est surjective, donc elle a un inverse à droite g : $f^5 \circ g = Id_E$. Comme $f^8 = f^5$, on obtient :

$$f^3 = f^3 \circ Id_E = f^3 \circ (f^5 \circ g) = (f^3 \circ f^5) \circ g = f^8 \circ g = f^5 \circ g = Id_E \;.$$

Une autre façon de le montrer est que comme f^5 est surjective, $\forall\, x \in E$, $\exists\, y \in E$, $x = f^5(y)$, et alors $f^3(x) = f^3(f^5(y)) = f^8(y) = f^5(y) = x$, donc $f^3 = Id_E$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$: Si $f^3 = Id_E$, alors $f^3 = f \circ f^2$ est surjective et $f^3 = f^2 \circ f$ est injective, dont on déduit que f est surjective et injective ; ainsi f est bijective.
$(iii) \Rightarrow (i)$: par définition.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: par définition.

Remarque : Plus généralement, le fait que $f^8 = f^5$ signifie que $\forall\, x \in E$, $f^5(x)$ est dans un cycle attracteur de période 1 ou 3, donc $h(x) \leq 5$. Si chaque élément de E est dans un cycle, alors $f^3 = Id_E$ et f est bijective. Sinon, pour $x \in E$ qui n'est pas dans un cycle, on a $f^{h(x)-1}(x) \neq f^{h(x)+2}(x)$ mais $f(f^{h(x)-1}(x)) = f^{h(x)}(x) = f^{h(x)+3}(x) = f(f^{h(x)+2}(x))$, donc f n'est pas injective; aussi, prenant $x \in E$ de hauteur maximum ($h(x) \leq 5$), on ne peut pas avoir $x = f(y)$, sinon $h(y) = h(x) + 1$ et x ne serait pas de hauteur maximum, donc $x \notin Im(f)$ et f n'est pas surjective.

NB. Cet exercice est une variante de la question 2 du contrôle de septembre 2006, pour lequel il y a un corrigé.

(3) Vu que $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $x\ R\ (x+3)$ et $x\ R\ (x+5)$, on obtient par récurrence sur $n = 0, 1, 2, \ldots$ que $x\ R^n\ (x+3n)$ et $x\ R^n\ (x+5n)$, donc $(x+3n)\ R^{-n}\ x$ et $(x+5n)\ R^{-n}\ x$. Soit $\rho = (R \cup R^{-1})^*$ la relation d'équivalence engendrée par R. Pour $x, y \in \mathbb{N}$, on a 3 cas :

- (i) $x = y$, donc $x\ \rho\ y$ par réflexivité.
- (ii) $x > y$, on a $x = y + n$ ($n \in \mathbb{N}$), donc $x\ R^n\ (x+5n) = (y+6n)\ R^{-2n}\ y$, ce qui donne $x\ \rho\ (x+5n) = (y+6n)\ \rho\ y$, et par transitivité on a $x\ \rho\ y$.
- (iii) $x < y$, on a $y = x + n$ ($n \in \mathbb{N}$), $y\ R^n\ (y+5n) = (x+6n)\ R^{-2n}\ x$, ce qui donne $x\ \rho\ (x+6n) = (y+5n)\ \rho\ y$, et par transitivité on a $x\ \rho\ y$.

Donc $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$, $x\ \rho\ y$, et ainsi $\rho = (R \cup R^{-1})^*$ est la relation universelle $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reliant tous les naturels.

NB. On a en fait utilisé l'égalité $3 + 3 - 5 = 1$.