UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2012-2013, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2013

Corrigé

(1) 45 experts, 4 fromages.

(i) Chaque vote correspond à une permutation des 4 fromages, il y en a donc en tout

$$4! = 24 \ .$$

(ii) Un vote nominatif correspond à une application de l'ensemble des 45 experts vers l'ensemble des 24 votes possibles, associant à chaque expert son vote, il y en a donc en tout

$$24^{45} \ .$$

(iii) Le vote anonyme d'un expert correspond à une voix pour le type de permutation choisie. Donc un scrutin correspond à une fonction définie sur l'ensemble des 24 permutations des 4 fromages, à valeurs entières non-négatives, dont la somme des valeurs vaut 45. On applique la formule du cours, ou on suit le raisonnement correspondant : on divise une feuille en 24 cases au moyen de 23 séparateurs, et pour chaque vote on écrit une croix dans la case correspondante, donc le nombre de scrutins possibles est le nombre d'alternances de 23 séparateurs et 45 croix sur $23 + 45$ positions, c.-à-d.

$$\binom{68}{23} = \binom{68}{45} \ .$$

(iv) La somme des coefficients de la ligne correspondant à un fromage donne le nombre de votes où il est classé 1er, 2ème, 3ème ou 4ème ; comme chacun des 45 experts doit lui donner un classement, cette somme vaut 45. La somme des coefficients de la colonne correspondant à un rang donne le nombre de votes où un des 4 fromages a obtenu ce rang ; comme chacun des 45 experts doit indiquer un fromage à ce rang, cette somme vaut 45. Donc le tableau est une matrice à coefficients entiers non-négatifs, où la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut 45.

NB. On ne peut dire rien de plus sur ce tableau. Tout tableau ayant cette propriété correspond à un scrutin. En effet, un théorème dit que toute matrice carrée à coefficients entiers non-négatifs, où la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut une constante k, est la somme de k matrices de permutation (une matrice de permutation a ses coefficients tous égaux à 0 ou 1, avec exactement un coefficient égal à 1 dans chaque ligne et chaque colonne).

(2) On a $p \models q$ si et seulement si soit $f(p) \prec f(q)$, soit $f(p) = f(q)$ et $p \leq q$.

(i) Pour $p \in P$, on a $f(p) = f(p)$ et $p \leq p$, donc $p \models p$. Ainsi $\models$ est réflexive. Soient $p, q \in P$ tels que $p \models q$ et $q \models p$. Le cas $f(p) \prec f(q)$ exclut les possibilités $f(q) \prec f(p)$ et $f(q) = f(p)$, donc il est incompatible avec $q \models p$; de même $f(q) \prec f(p)$ est incompatible avec $p \models q$. On en déduit qu'on a $f(p) = f(q)$, $p \leq q$ et $q \leq p$, donc $p = q$ par l'antisymétrie de $\leq$. Par conséquent $\models$ est antisymétrique. Soient $p, q, r \in P$ tels que $p \models q$ et $q \models r$. On a

$$\begin{array}{lcl} f(p) \prec f(q) & \text{ou} & \Big(f(p) = f(q) \quad \text{et} \quad p \leq q \Big) \ , \\ f(q) \prec f(r) & \text{ou} & \Big(f(q) = f(r) \quad \text{et} \quad q \leq r \Big) \ . \end{array}$$

Les 3 cas $f(p) \prec f(q) \prec f(r)$, $f(p) \prec f(q) = f(r)$ et $f(p) = f(q) \prec f(r)$ donnent $f(p) \prec f(r)$, donc $p \models r$; le 4ème cas est $f(p) = f(q)$ et $p \leq q$ avec $f(q) = f(r)$ et $q \leq r$, ce qui donne $f(p) = f(r)$ et $p \leq r$ par transitivité de $=$ et $\leq$, donc $p \models r$. Par conséquent $\models$ est transitive. Etant réflexive, antisymétrique et transitive, $\models$ est une relation d'ordre sur P.

(*ii*) Soient $p, q \in P$. Comme $\preceq$ est un ordre total, on a $f(p) \prec f(q)$, $f(q) \prec f(p)$ ou $f(q) = f(p)$; $f(p) \prec f(q)$ donne $p \models q$ tandis que $f(q) \prec f(p)$ donne $q \models p$. Il reste le cas où $f(q) = f(p)$; comme $\leq$ est un ordre total, on a $p \leq q$ ou $q \leq p$, qui donnent respectivement $p \models q$ et $q \models p$. Donc on a toujours $p \models q$ ou $q \models p$, ce qui veut dire que l'ordre $\models$ est total.

NB. La propriété d'être "total" pour un ordre n'a rien à voir avec celles de "totale à gauche" ou "totale à droite" pour une relation.

On remarquera que la définition de $\models$ est similaire à celle du produit lexicographique de deux ensembles ordonnés, et d'ailleurs notre preuve des points (*i*) et (*ii*) est la même que celle de deux énoncés bien connus : le produit lexicographique de deux ordres est un ordre, et celui de deux ordres totaux est un ordre total. Cependant la relation $f(p) \preceq f(q)$ ne donne pas un ordre, car elle est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique. Ici l'antisymétrie dans le cas $f(p) = f(q)$ est obtenue par la deuxième relation $p \leq q$.

(3) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie comme suit :

$$f(z) = \begin{cases} -z+1 & \text{si } z \geq 2, \\ -z-1 & \text{si } z \leq -2, \\ -z & \text{si } |z| \leq 1. \end{cases}$$

(*i*) Pour $z = 0, 1, -1$ on a $f(z) = -z$, donc $|f(z)| = |z|$. Pour $z \geq 2$, on a $f(z) = -z + 1 < 0$, donc $|f(z)| = -(-z+1) = z - 1 = |z| - 1$. Pour $z \leq -2$, on a $f(z) = -z - 1 > 0$, donc $|f(z)| = -z - 1 = |z| - 1$. On obtient ainsi $|f(z)| = |z|$ pour $|z| \leq 1$, et $|f(z)| = |z| - 1$ pour $|z| > 1$.

(*ii*) Comme $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ et $f(-1) = 1$, on a deux cycles attracteurs $\{0\}$ et $\{1, -1\}$, de périodes respectives 1 et 2. Ce sont les seuls, tous les autres entiers z (avec $|z| > 1$) ont le cycle attracteur $\{1, -1\}$. Soit $z \in \mathbb{Z}$ avec $|z| = n \geq 2$; pour $t = 0, \ldots, n-2$ on a $|f^t(z)| = n - t > 1$, puis $|f^{n-1}(z)| = 1$, donc $f^{n-1}(z) \in \{1, -1\}$.