UFR de Mathématique et Informatique
L3 Informatique S6, 2010-2011, semestre de printemps

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2011

Corrigé

(1) La fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est définie par :

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \leq 100, \\ \lfloor n/2 \rfloor & \text{si } n > 100. \end{cases}$$

(i) Notons d'abord que pour $51 \leq n \leq 100$ on a $f(n) = 2n$ et $f(2n) = n$. Donc les paires $\{n, 2n\}$ pour $n = 51, \ldots, 100$ sont des cycles attracteurs de f, de période 2.

Montrons que ce sont tous les cycles de f, qu'il n'y en a pas d'autres. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) \neq n$. Soit n le plus petit élément d'un cycle ; on a $f(n) > n$ et $n = f(m)$ pour un m dans le cycle avec $m > n$, ce qui donne $n \leq 100$ et $n = \lfloor m/2 \rfloor$ avec $m > 100$, donc $50 \leq n \leq 100$. Mais $f(50) = 100$, qui est dans le cycle $\{100, 200\}$, donc $n \neq 50$; par conséquent $51 \leq n \leq 100$, et on a le cycle $\{n, 2n\}$ décrit ci-dessus.

(ii) On a 4 cas :

(a) Si $51 \leq n \leq 100$ ou si n est pair avec $102 \leq n \leq 200$, alors n est dans un cycle, et sa hauteur est 0.

(b) On a $101 \mapsto 50 \mapsto 100$, donc 101 est de hauteur 2. Si n est impair avec $103 \leq n \leq 201$, $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, compris entre 51 et 100, donc n est de hauteur 1.

(c) Si $n \leq 50$, alors il existe $t > 0$ tel que $50 < 2^t n \leq 100$, en fait $t = \lfloor \log_2(100/n) \rfloor$. En répétant l'application de f à n, on itère un doublement, jusqu'à $f^t(n) = 2^t n$, compris entre 51 et 100, qui est dans un cycle. Donc n est de hauteur t.

(d) Si $n \geq 202$, alors il existe $t > 0$ tel que $101 \leq n/2^t < 202$, en fait $t = \lfloor \log_2(n/101) \rfloor$. En répétant l'application de f à n, on itère une division entière par 2, jusqu'à $f^t(n) = \lfloor n/2^t \rfloor$, compris entre 101 et 201. En fonction des cas de (a) et (b), cela donne que n est de hauteur t si $\lfloor n/2^t \rfloor$ est pair, de hauteur $t+2$ si $\lfloor n/2^t \rfloor = 101$, et de hauteur $t+1$ si $\lfloor n/2^t \rfloor$ est impair mais différent de 101.

(2) La relation binaire $\sim$ sur $\mathbb{Z}^2$ est définie par $(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si $(c, d) = (b, a)$ ou $(c, d) = (-a, -b)$. Déterminons la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$ engendrée par $\sim$.

Soit M la relation "miroir" donnée par $(a, b)\ M\ (c, d)$ si et seulement si $(c, d) = (b, a)$, et S la relation "signe opposé" donnée par $(a, b)\ S\ (c, d)$ si et seulement si $(c, d) = (-a, -b)$. Donc $\sim$ est la réunion de M et S. Les deux relations M et S sont fonctionnelles, dans le sens que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, il y a un unique $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a, b)\ M\ (c, d)$, et un unique $(c', d') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a, b)\ S\ (c', d')$. On a $(a, b)\ M\ (b, a)\ M\ (a, b)$ et $(a, b)\ S\ (-a, -b)\ S\ (a, b)$; donc $M^2 = S^2 = Id$, et les deux relations M et S sont symétriques. De plus $(a, b)\ M\ (b, a)\ S\ (-b, -a)$ et $(a, b)\ S\ (-a, -b)\ M\ (-b, -a)$; donc $MS = SM$ est la relation fonctionnelle donnée par $(a, b)\ MS\ (-b, -a)$. Montrons que $Id \cup M \cup S \cup MS$ est la relation d'équivalence engendrée par $\sim = M \cup S$. Une première façon est de partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \overset{M}{\longleftrightarrow} & (b,a) \\ S\updownarrow & & \updownarrow S \\ (-a,-b) & \underset{M}{\longleftrightarrow} & (-b,-a) \end{array}$$

On voit qu'à partir de (a,b), on peut avec M et S et leur composition $MS = SM$ atteindre (b,a), $(-a,-b)$ et $(-b,-a)$; de plus, comme M et S sont fonctionnelles, à partir de (a,b), (b,a), $(-a,-b)$ et $(-b,-a)$, on ne peut pas obtenir d'autres couples. Donc la classe d'équivalence de (a,b) comprend les 4 couples (a,b), (b,a), $(-a,-b)$ et $(-b,-a)$, avec $(a,b)\ Id\ (a,b)$, $(a,b)\ M\ (b,a)$, $(a,b)\ S\ (-a,-b)$ et $(a,b)\ MS\ (-b,-a)$. Ainsi la relation d'équivalence engendrée par $M \cup S$ est $Id \cup M \cup S \cup MS$.

Une deuxième façon est de montrer par calcul que $Id \cup M \cup S \cup MS$ est transitive ; on a $MSM = MMS = IdS = S$, $SMS = MSS = M$ et $MSMS = MMSS = Id$, donc :

$$\begin{aligned} Id(Id \cup M \cup S \cup MS) &= IdId \cup IdM \cup IdS \cup IdMS = Id \cup M \cup S \cup MS \ , \\ M(Id \cup M \cup S \cup MS) &= MId \cup MM \cup MS \cup MMS = Id \cup M \cup S \cup MS \ , \\ S(Id \cup M \cup S \cup MS) &= SId \cup SM \cup SS \cup SMS = Id \cup M \cup S \cup MS \ , \\ MS(Id \cup M \cup S \cup MS) &= MSId \cup MSM \cup MSS \cup MSMS = Id \cup M \cup S \cup MS \ , \end{aligned}$$

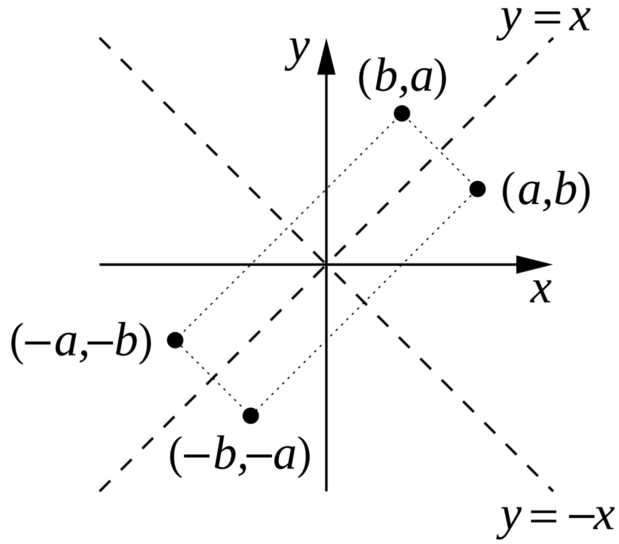
ce qui donne

$$\begin{gathered} (Id \cup M \cup S \cup MS)(Id \cup M \cup S \cup MS) = \\ Id(Id \cup M \cup S \cup MS) \cup M(Id \cup M \cup S \cup MS) \cup S(Id \cup M \cup S \cup MS) \cup MS(Id \cup M \cup S \cup MS) \\ = Id \cup M \cup S \cup MS \ . \end{gathered}$$

Ainsi $Id \cup M \cup S \cup MS$ est transitive et réflexive (puisque contenant Id), c'est la fermeture transitive et réflexive $(M \cup S)^+$ de $M \cup S$. Mais comme M et S sont symétriques, $(M \cup S)^+$ l'est aussi, et c'est la relation d'équivalence engendrée par $\sim = M \cup S$.

Si on veut exprimer $Id \cup M \cup S \cup MS$ en fonction de $\sim$, on remarquera que $\sim^2 = (M \cup S)^2 = M^2 \cup S^2 \cup MS \cup SM = Id \cup MS$, donc $\sim \cup \sim^2 = Id \cup M \cup S \cup MS$. On obtient alors $\sim^3 = (M \cup S)(Id \cup MS) = M \cup S = \sim$, ce qui montre que $\sim \cup \sim^2$ est bien transitive, donc (étant aussi symétrique et réflexive) une relation d'équivalence.

On peut donner une interprétation géométrique de ces relations. Dans le plan cartésien, M est la symétrie par rapport à la droite $y = x$, S est la symétrie centrale, et $MS = SM$ est la symétrie par rapport à la droite $y = -x$. On voit que ces 3 symétries sont chacune leur propre inverse, et par composition de celles-ci les unes avec les autres on ne peut engendrer aucune nouvelle symétrie, excepté l'identité.



(3) On a 30 filles et 20 garçons, et une équipe est formée à partir de ces 50 personnes.

(i) Le nombre d'équipes de 10 personnes avec au moins une fille et au moins un garçon est le nombre total d'équipes, moins celui de celles sans fille ou sans garçon ; les cas sans fille et sans garçon s'excluent mutuellement, donc leurs nombres s'aditionnent. On obtient ainsi

$$\binom{50}{10} - \binom{20}{10} - \binom{30}{10} \ .$$

On peut aussi additionner les combinaisons de k filles et $10 - k$ garçons pour $1 \leq k \leq 9$ (elles s'aditionnent parce qu'elles s'excluent mutuellement), ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{30}{k} \binom{20}{10-k} \ .$$

Les deux solutions sont égales, car

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{30}{k} \binom{20}{10-k} = \binom{50}{10} \ .$$

(ii) Les équipes de 6 personnes avec strictement plus de filles comprennent 4, 5 ou 6 filles avec respectivement 2, 1 ou 0 garçons, donc leur nombre est obtenu en additionnant ces combinaisons :

$$\binom{30}{4}\binom{20}{2} + \binom{30}{5}\binom{20}{1} + \binom{30}{6} \ .$$

(On a simplifié avec $\binom{20}{0} = 1$.)

(iii) Les équipes de 7 personnes avec un nombre pair de filles comprennent 0, 2, 4 ou 6 filles avec respectivement 7, 5, 3 ou 1 garçons, donc leur nombre est obtenu en additionnant ces combinaisons :

$$\binom{20}{7} + \binom{30}{2}\binom{20}{5} + \binom{30}{4}\binom{20}{3} + \binom{30}{6} 20 \ .$$

(On a simplifié avec $\binom{20}{0} = 1$ et $\binom{20}{1} = 20$.)

Attention : les solutions du type “choisir m filles, n garçons, puis p personnes de sexe indéterminé” sont incorrectes, car elles compteront plusieurs choix correspondant à une même équipe, ce qui donnera un total supérieur à la réalité. Par exemple si on sélectionne deux filles A et B, cela peut correspondre à la fois au choix de A comme fille, puis B comme personne de sexe indéterminé, et au choix de B comme fille, puis A comme personne de sexe indéterminé.