UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique
Combinatoire — 2008-2009

3ème feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

Exercice 1

Supposons l'application $f : E \to E$ *idempotente*, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(f(x)) = f(x)$. Montrer que les 4 énoncés suivants sont équivalents :
  a. f est injective ;
  b. f est surjective ;
  c. f est bijective ;
  d. $f = Id_E$, l'identité sur E, c.-à-d. pour tout $x \in E$ on a $f(x) = x$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$.
  a. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
  b. Montrer que pour $n \geq 3$, on a $2 \leq f(n) < n$, et que la restriction de f aux $n \geq 2$ est un fonction $\mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ qui décroît les valeurs : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $f(n) \leq n$.
  c. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ quel est son cycle attracteur (en fait, f a exactement deux cycles attracteurs).

(Vous savez probablement que toute famille d'entiers naturels possède un minimum, par conséquent une suite décroissante d'entiers naturels $n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \ldots$ atteint à un certain moment son minimum, c.-à-d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k = n_{k+1} = n_{k+2} = \ldots$.)

Exercice 3

Soient A et B deux ensembles disjoints ($A \cap B = \emptyset$), de cardinaux $card(A) = a > 0$ et $card(B) = b > 0$. Donner le nombre de parties X de $A \cup B$ telles que $X \cap A \neq \emptyset$ et $X \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 4

On définit la relation R sur $\mathbb{N}$ par $a\ R\ b$ si et seulement si $a = b - 3$. Quelle est la relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$ engendrée par R (c.-à-d. la plus petite relation réflexive, antisymétrique et transitive contenant R).

Exercice 5

Soit $R \subseteq A \times B$ une relation entre A et B. Considérons les relations RR^{-1} et $R^{-1}R$.

a. Sur quels ensembles sont-elles définies ? Expliciter leur définition en termes de R uniquement.

b. Sont-elles symétriques ? Réflexives ? A quelles conditions ?

Exercice 6

Soit E un ensemble fini et f une application $E \to E$. On définit sur E la relation $\equiv$ par $x \equiv y$ s'il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $f^i(x) = f^j(y)$. Montrez que :

a. $\equiv$ est une relation d'équivalence.

b. Si $x \equiv y$, alors x et y ont le même cycle attracteur et par conséquent la même période.