UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2008-2009

2ème feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

(1) On définit la suite de Fibonacci F_n, $n \geq 0$, comme suit :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

i Calculer F_n pour $n = 0, 1, 2$.

ii Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. (NB : $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2$ sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$).

iii Démontrer par récurrence que $F_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 0$, et en déduire que la suite F_n est strictement croissante pour $n \geq 1$.

(2) On considère comme admis les résultats de l'exercice précédents.

i Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F_{2n} = 1 + \sum_{j=1}^{n} F_{2j-1} \qquad \text{et} \qquad F_{2n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} F_{2j}.$$

(Indication : utilisez la récurrence et le fait que $1 = F_0 = F_1$.)

ii Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_n \leq m < F_{n+1}$. Montrez ensuite que si $F_n < m < F_{n+1}$, alors $n \geq 3$ et $m - F_n < F_{n-1}$.

On définit l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites $i_1, \ldots, i_t$ d'entiers telles que : (a) $t \geq 1$, (b) $1 \leq i_1$, et (c) pour $t > 1$, chaque $k = 1, \ldots, t-1$ vérifie $i_k + 2 \leq i_{k+1}$.

iii Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite $i_1, \ldots, i_t \in \mathcal{F}$ telle que

$$m = \sum_{k=1}^{t} F_{i_k}.$$

(Indication : raisonnez par récurrence sur le nombre n défini en (ii).)

(3) Donnez

i une bijection $\mathbb{N} \times \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{N}$;

ii une injection non surjective $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$;

iii une surjection non injective $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

(4) Donnez

i une bijection $]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$;

ii une bijection $[0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$;

iii une injection non surjective $[0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$;

iv une injection non surjective $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1[$;

v une surjection non injective $[0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$;

vi une surjection non injective $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1[$.