

**UFR de Mathématique et Informatique**  
**L2 Informatique**

**Combinatoire — 2005-2006**

*Devoir à rendre le lundi 9 janvier 2006*

*Justifier soigneusement les réponses*

(1) On définit sur l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de l'ensemble  $E$  la relation  $\mathcal{R}$  comme suit:

$$\forall A, B \subseteq E, \quad A \mathcal{R} B \iff B = E \setminus A.$$

Déterminer la plus petite relation d'équivalence  $\mathcal{S}$  contenant  $\mathcal{R}$ , c.à.d. telle que

$$\forall A, B \subseteq E, \quad A \mathcal{R} B \implies A \mathcal{S} B.$$

(2) Soit  $E$  un ensemble fini et soit  $p \in E$ . Soit

$$\mathcal{P}(E, p) = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid p \in X\},$$

l'ensemble des parties de  $E$  contenant  $p$ . On peut identifier

$$\{X \in \mathcal{P}(E) \mid p \notin X\},$$

l'ensemble des parties de  $E$  ne contenant pas  $p$ , avec  $\mathcal{P}(E \setminus \{p\})$ .

- (i) Donnez une bijection entre  $\mathcal{P}(E, p)$  et  $\mathcal{P}(E \setminus \{p\})$ .
- (ii) Dérivez une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{P}_P(E)$  des parties de  $E$  ayant un cardinal pair et l'ensemble  $\mathcal{P}_I(E)$  des parties de  $E$  ayant un cardinal impair.
- (iii) Si  $\text{card}(E) = n$ , combien de parties de  $E$  sont-elles de cardinal pair ?

(3) Soit  $E$  un ensemble. Pour une application  $f : E \rightarrow E$ , on écrit  $\text{Im}(f)$  pour l'image de  $f$  :

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

On dit que  $f$  est *idempotente* si pour tout  $x \in E$  on a  $f(f(x)) = f(x)$ .

- (i) Soit  $S$  un sous-ensemble de  $E$ . Donner une condition C1 sur  $f(x)$  pour  $x \in S$  et une condition C2 sur  $f(x)$  pour  $x \notin S$ , telles que C1 et C2 sont vérifiées ensemble si et seulement si  $f$  est idempotente et  $\text{Im}(f) = S$ .

On suppose  $E$  fini, avec  $\text{card}(E) = n$ .

- (ii) Soit  $S \subseteq E$ , avec  $\text{card}(S) = s$ . Donner le nombre d'applications idempotentes  $f : E \rightarrow E$  telles que  $\text{Im}(f) = S$ .
- (iii) Donner le nombre d'applications idempotentes  $f : E \rightarrow E$ .