Rappels des notions de topologie

Point limite $\rightsquigarrow$ convergence, connexité, continuété, différentiabilité, etc.

Point limite $\leftrightsquigarrow$ Espace topologique.

Un ensemble $\mathcal{E}$ a une topologie pourvu que pour tout point p de $\mathcal{E}$ et tout sous-ensemble X de $\mathcal{E}$ la question :

"p est-il un point limite de X relativement à la topologie ?"

a une réponse.

- toujours oui $\leftrightsquigarrow$ topologie triviale
- toujours non $\leftrightsquigarrow$ topologie discrète

Définition :
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ *(i.e. $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{E}$).*

L'ensemble τ est dit une topologie sur $\mathcal{E}$ si

- $\emptyset, \mathcal{E} \in \tau$;
- Une union quelconque d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $(O_i)_{i\in I}$ est une collection d'éléments de τ alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ est aussi un élément de τ)* ;
- Une intersection finie d'éléments de τ est dans τ *(i.e si $O_1, ..., O_n \in \tau$ alors $O_1 \bigcap ... \bigcap O_n$ est aussi un élément de τ).*

τ est appelé une topologie sur $\mathcal{E}$, les éléments de τ sont appelés les ouverts de la topologie et le couple $(\mathcal{E}, \tau)$ est appelé un espace topologique.

Le complémentaire d'un ouvert est appelé un fermé :

$$F \text{ est fermé } \Longleftrightarrow \mathcal{E} \setminus F \text{ est ouvert}$$

Définition :
Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et soient $p \in \mathcal{E}$ et $X \subseteq \mathcal{E}$. p est dit un point limite de X relativement à τ, si tout ouvert de τ contenant p contient nécéssairement un point x de X different de p.
On notera dans la suite $Limite_\tau(X)$ l'ensemble des points limites de X relativement à τ.

Exemple d'esapces topologiques :
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble

1. $\tau_{tr} = \{\emptyset, \mathcal{E}\}$ est la topologie triviale sur $\mathcal{E}$.
2. $\tau_{dis} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est la topologie discrète sur $\mathcal{E}$.
3. Soit $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$. $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \mathcal{E}\}$ est une topologie sur $\mathcal{E}$.

Notations :
Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $X \subseteq \mathcal{E}$,

- $\overline{X} = X \bigcup Limite_\tau(X)$. $\overline{X}$ est appelé la fermeture de X
- $X^\circ = \bigcup_{O \in \tau \text{ et } O \subseteq X} O$. X° est appelé ouverture de X et est le plus grand ouvert contenu dans X.
- $\partial(X) = \overline{X} \cap \overline{\mathcal{E} \setminus X}$. $\partial(X)$ est appelé le bord de l'ensemble X.

Exercices :
Montrez que si $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $X \subseteq \mathcal{E}$. Alors on a :

1. $\overline{X} = \bigcap_{(\mathcal{E} \setminus F) \in \tau \text{ et } X \subseteq F} F$. $\overline{X}$ est le plus petit ensemble fermé contenant X.
2. $\overline{X}$ est un ensemble fermé relativement à τ.
3. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.
4. X est fermé $\iff$ $\overline{X} = X$.

Opérations sur les topologies :
Définition :

- Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et X un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. La topologie induite par τ sur X est la topologie $\tau_{|_X} = \{O \cap X \mid O \in \tau\}$ ($\tau_{|_X}$ *est appelé aussi la trace de la topologie* τ *sur* X). Le couple $(X, \tau_{|_X})$ est dit un sous-espace topologique de (X, τ).

- Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et τ_1, τ_2 deux topolgies sur $\mathcal{E}$. τ_1 est dite plus fine que τ_2 lorsque $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Espaces métriques

Définition Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Une application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^+$ est dite une métrique (ou une distance) si pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}$ on a :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Le couple $(\mathcal{E}, d)$ est appelé un espace métrique.

Exemples $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) :
Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

- $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$
- $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2}$
- Plus généralement, pour $p \geq 1$ on'a : $d_p(\vec{x}, \vec{y}) = (\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque : $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \lim\limits_{p \to \infty} d_p(\vec{x}, \vec{y})$

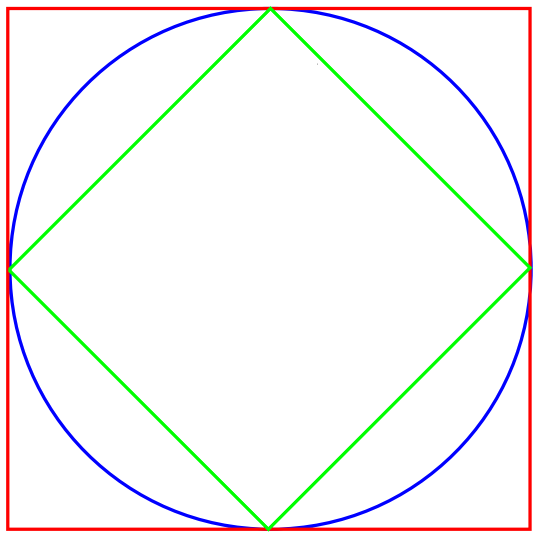
Notation :

Soient $(\mathcal{E}, d)$ un espace métrique, $x \in \mathcal{E}$ et $r > 0$. L'ensemble :

$$B_r^d(x) = \{y \in \mathcal{E} \mid d(x,y) < r\}$$

est appelé la boule ouverte de $\mathcal{E}$ de centre x et de rayon r relativement à la distance d.

$$B_r^d(x) \rightsquigarrow B_r(x)$$



Remarque :

La donnée d'un espace métrique induit une topologie. En effet, soit $(\mathcal{E}, d)$ un espace métrique. Alors

$$\tau^d = \{O \subseteq \mathcal{E} \mid \forall x \in O, \exists r > 0, B_r(x) \subseteq O\}$$

est une topologie sur $\mathcal{E}$, elle est appelée la topologie induite par la métrique d sur $\mathcal{E}$.

Remarque :

Sur $\mathbb{R}^n$, $\tau^{d_p} = \tau^{d_\infty}$ pour tout $p \geq 1$. Cette topologie est appelée la topologie usuelle (ou la topologie euclidienne) sur $\mathbb{R}^n$.

Application continue

Soient $(\mathcal{E}_1, \tau_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \tau_2)$ deux espaces topolgiques.

- Une application $f : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ est dite continue si pour tout $O_2 \in \tau_2,\ f^{-1}(O_2) \in \tau_1$.

- Une application $f : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ est appelé un homéomorphisme si f est bijective et continue et f^{-1} est continue.
  Dans ce cas, on dit que les ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont homéomorphes.

Définition : Séparabilité ; connexité

Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et soit $X \subseteq \mathcal{E}$.

- $\mathcal{E}$ est dit séparable s'il existe deux ouverts non vides et disjoints dont l'union est $\mathcal{E}$.

- $\mathcal{E}$ est dit connexe, s'il n'est pas séparable.

– X est dit connexe relativement à τ si le sous-espace topologique $(X, \tau_{|X})$ est un espace topologique connexe.

– X est dit une composante connexe relativement à τ si X est connexe relativement à τ et pour tout X' tel que $X \subset X' \subseteq \mathcal{E}$, X' n'est pas connexe relativement à τ.

Définition : Connexité par arc

Soit $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique.

- Un arc dans $(\mathcal{E}, \tau)$ est l'image $f([0,1])$ d'une application continue f de $[0,1]$ dans $(\mathcal{E}, \tau)$ où $[0,1]$ est considéré avec la topologie usuelle induite par la distance d_2. $f(0)$ et $f(1)$ sont appelés les extrémités de l'arc.

- $(\mathcal{E}, \tau)$ est dit connexe par arc si pour tout points $p_1, p_2 \in \mathcal{E}$, il existe un arc dans $(\mathcal{E}, \tau)$ dont les extrémités sont les points p_1, p_2.

Définition :

Soient $(\mathcal{E}, \tau)$ un espace topologique et $f : [0,1] \mapsto \mathcal{E}$ une application continue où $[0,1]$ est consideré avec la topologie usuelle induite par la distance d_∞. $\mathcal{C}_f = f([0,1])$ est dit *une courbe fermée simple* dans $(\mathcal{E}, \tau)$ si $f(0) = f(1)$ et la restriction de f à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ est une application injective.

Théorème de Jordan :

Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la topologie usuelle et soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$ a deux composantes connexes dont une est bornée et l'autre non-bornée.

Définition :

Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la topologie usuelle et soient $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$ et $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C})$. $Ind(p,\mathcal{C}) = Card(\{q \mid q \in (\mathcal{C} \cap R(p))$ et $R(p)$ non tangeant à $\mathcal{C}$ au point $q\})$ où $R(p)$ est une demi-droite partant du point q. $Ind(p,\mathcal{C})$ est appelé *l'indice* du point p relativement à la courbe fermée simple $\mathcal{C}$.

Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^2$ et $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C})$. Alors,

- La paritée du nombre $Ind(p,\mathcal{C})$ ne dépond pas du choix de la demi-droite $R(p)$ partant de p.
- Si $Ind(p,\mathcal{C})$ est impair, alors p est dans la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.
- Si $Ind(p,\mathcal{C})$ est pair, alors p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.