Graphe

Définitions et notations :

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Un graphe non-orienté simple sur $\mathcal{E}$ est un couple $G = (\mathcal{E}, A)$ où A est un ensemble de paires sur $\mathcal{E}$ c'est-à-dire des éléments de la forme $\{x, y\}$ avec $x, y \in \mathcal{E}$ et $x \neq y$ (i.e. $A \subseteq \mathcal{P}_2(\mathcal{E})$ où $\mathcal{P}_2(\mathcal{E})$ est l'ensemble des paires de l'ensemble $\mathcal{E}$). Les éléments de $\mathcal{E}$ (respectivement de A) sont appelés les sommets (respectivement les arêtes) du graphe G.

- $V_G(x) = \{y \mid \{x, y\} \in A\}$ et $V_G^*(x) = V_G(x) \bigcup \{x\}$.

- Un chemin C dans G est une suite $C = x_0, x_1, ..., x_n$ tel que $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$ pour $0 \leq i < n$. x_0 (respectivement x_n) est appelé le début (respectivement la fin) du chemin C et n est appelé la longueur de C.

- G est dit connexe si $\forall x, y \in \mathcal{E}$, il existe un chemin de début x et de fin y.

Définitions et notations (suite) :

- Un chemin $x_0, ..., x_n$ est dit simple si $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ sauf peut-être pour $\{i, j\} = \{0, n\}$.

- Un cycle est un chemin $x_0, ..., x_n$ tel que $x_0 = x_n$ et un cycle simple est un cycle qui est un chemin simple.

- Un arc simple est un chemin $x_0, ..., x_n$ tel que si $\{x_i, x_j\} \in A$ alors $i \equiv j + 1(\text{mod} n - 1)$ ou $j \equiv i + 1(\text{mod} n - 1)$.

- Une courbe fermée simple est un cycle qui est un arc simple. Une courbe fermée simple simple est appelée aussi une face.

- Un chemin géodesique entre deux points est un plus court chemin entre ces deux points.

Remarques :

- La donnée d'une fonction $V : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{E})$ telle que pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $x \notin V(x)$ et $(y \in V(x) \iff x \in V(y))$ détermine d'une façon unique un graphe simple non-orienté G_V. La fonction V est appelée *le voisinage associée* au graphe G_V.

- Un chemin géodesique est un arc.

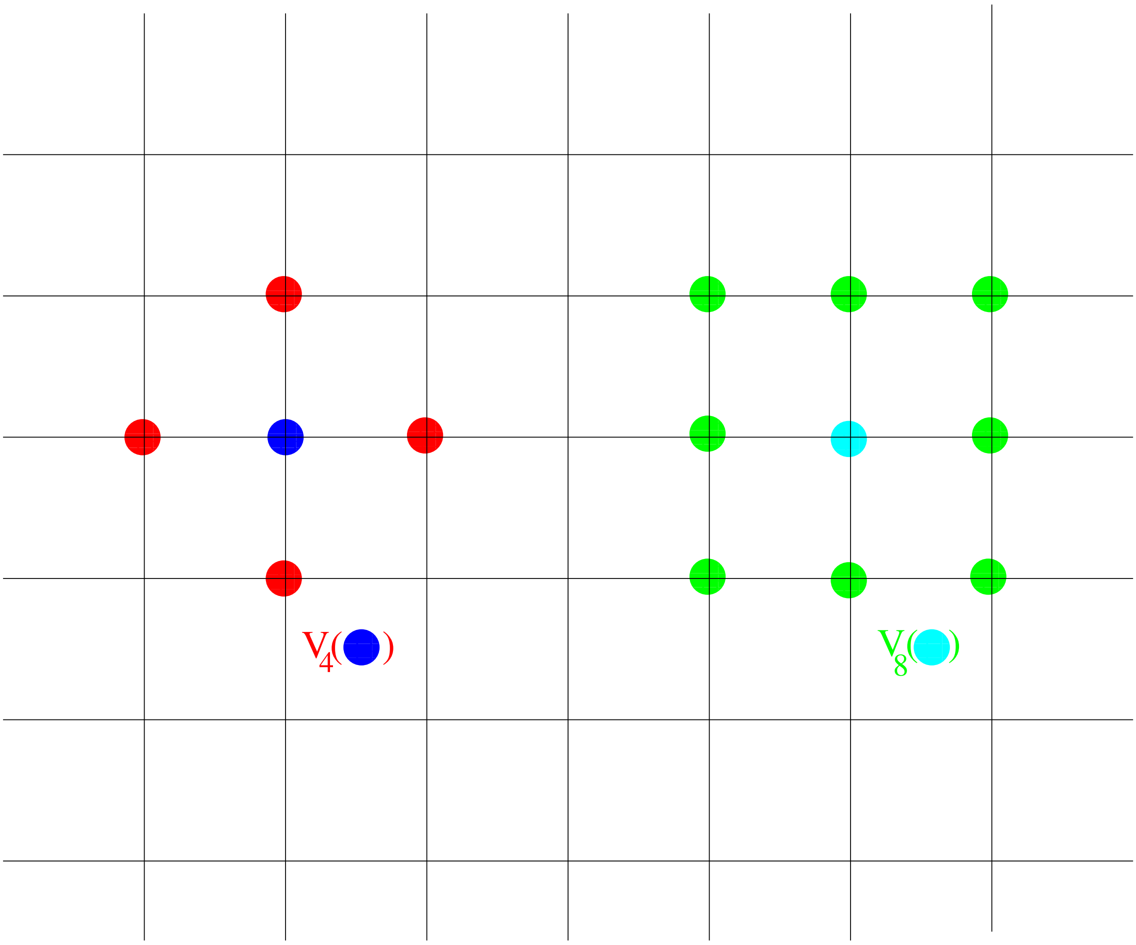
Exemples :

- $G_1 = (\mathbb{Z}, \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$.
- Sur $\mathbb{Z}^2$ on considère deux structures de graphes :

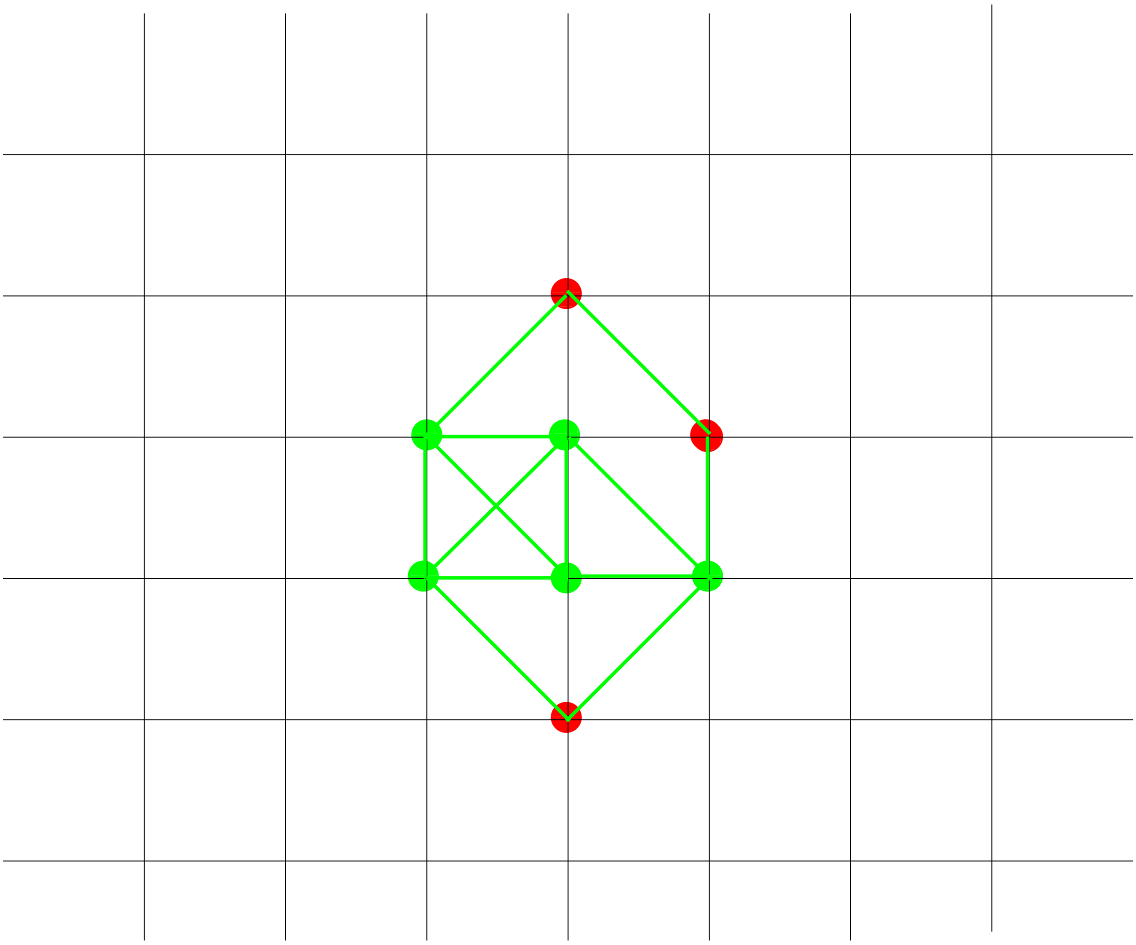
  1. $G_4 = (\mathbb{Z}^2, A_4)$ où A_4 correspond à la fonction voisinage V_4 définie par $V_4(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1(x, p) = 1\}$.

  2. $G_8 = (\mathbb{Z}^2, A_8)$ où A_8 correspond à la fonction voisinage V_8 définie par $V_8(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_\infty(x, p) = 1\}$.

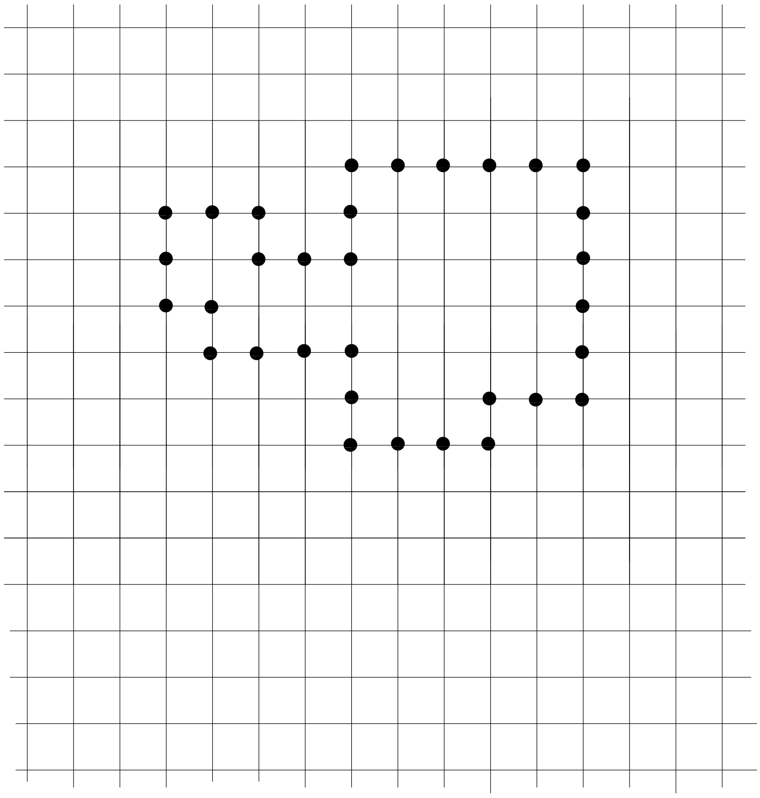
Les voisinages relativement à G_4 et G_8

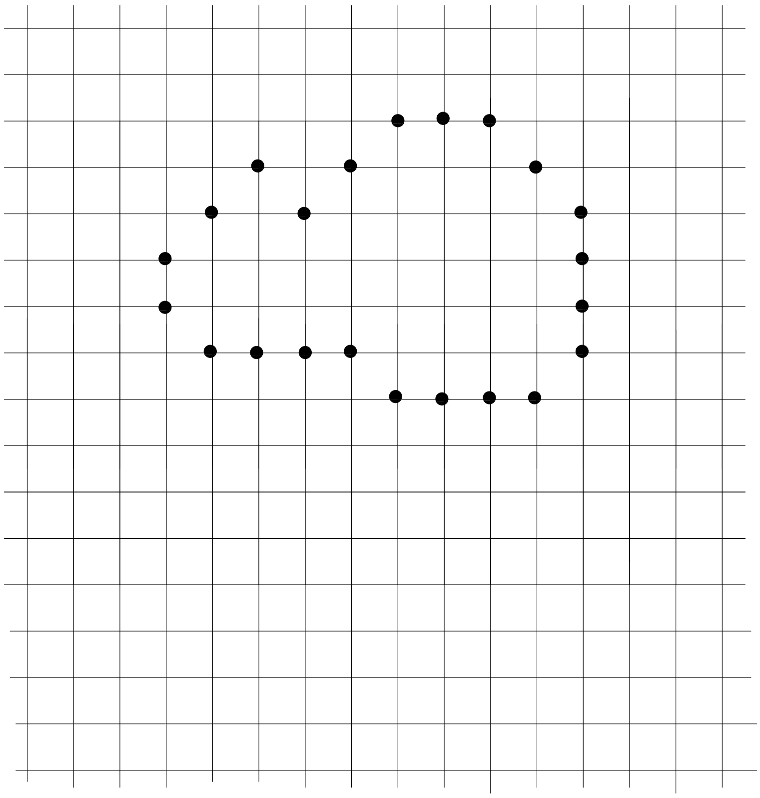


Le Garphe G_8 est non planaire



Courbes fermées dans G_4 et G_8





Définitions :
Soient $G = (\mathcal{E}, A)$ un graphe non-orienté simple sur $\mathcal{E}'$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$.

- $G(\mathcal{E}') = (\mathcal{E}', A_{|_{\mathcal{E}'}})$ est appelé le sous-graphe de G engendré par $\mathcal{E}'$ où $A_{|_{\mathcal{E}'}} = A \bigcap \mathcal{P}_2(\mathcal{E}')$.
- $\mathcal{E}'$ est dit connexe relativement à G (ou connexe (s'il n y pas d'ambiguïté concernat le graphe G)) si le graphe $G(\mathcal{E}')$ est connexe.
- $\mathcal{E}'$ est appelé une composante connexe de G, si $\mathcal{E}'$ est un ensemble connexe maximal (pour l'inclusion) dans $\mathcal{E}$. Autrement dit, si $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}''$ n'est pas connexe.

Remarques :

- Soit $G = (\mathcal{E}, A)$ un graphe simple non-orienté et soit C un sous-ensemble connexe de $\mathcal{E}$ alors il existe une et une seule composante connexe de G contenant C.
- L'ensemble $\mathcal{C}(G)$ des compsantes connexes d'un graphe $G = (\mathcal{E}, A)$ est une partition de $\mathcal{E}$ autrement dit $\mathcal{E} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(G)} C$ et si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ et $C_1 \neq C_2$ alors $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Définition :

- Un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ pour $n = 1$ ou 2 est dit $k-$connexe s'il est connexe relativement au graphe G_k pour $k = 1, 4$ ou 8 et une k-composante connexe est une composante connexe relativement au graphe G_k.
- Un k-arc simple (respectivement une k-courbe fermée simple) est un arc (respectivement une courbe fermée simple) relativement au graphe G_k.

4-Connexité et 8-connexité