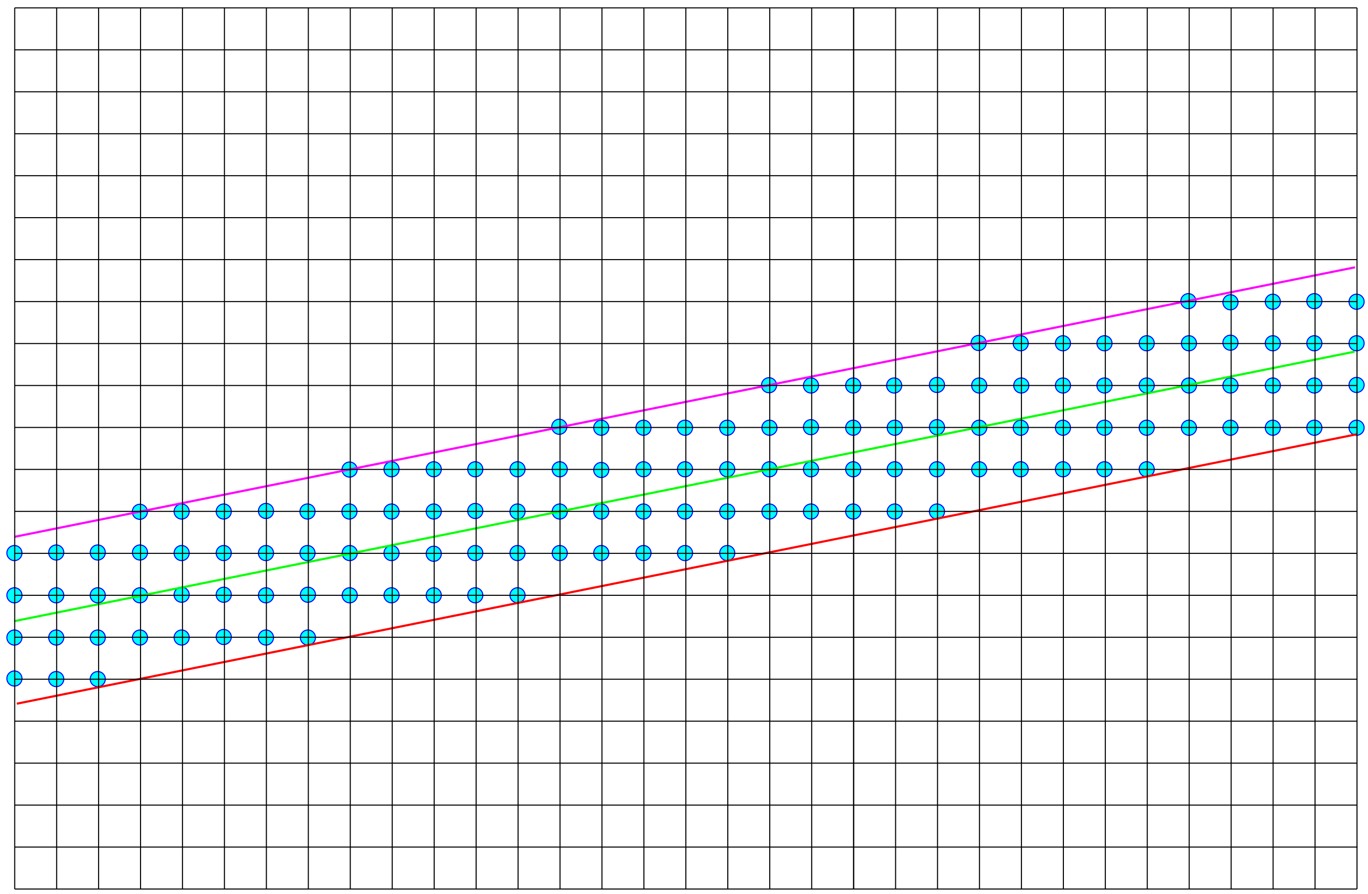
Les Droites discrètes

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$:

$$\mathcal{D}(a,b,c,\omega) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad 0 \leq ax - by + c < \omega\}$$

- $\frac{a}{b}$ est la `pente` de $\mathcal{D}(a,b,c,\omega)$.
- $(a, -b)$ est le `vecteur normal` de $\mathcal{D}(a,b,c,\omega)$.
- c est la `phase` de $\mathcal{D}(a,b,c,\omega)$.
- ω est l'`épaisseur arithmétique` de $\mathcal{D}(a,b,c,\omega)$.



Points de la droite discrete D(1,6,12,24) ; — La droite reelle : x−6y=0

— La droite reelle : x−6y−12=0 ; — La droite reelle : x−6y+12=0

- $\mathcal{D}(a,b,c,\omega) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad \lfloor \frac{ax-by+c}{\omega} \rfloor = 0\}$

- $0 \leq ax-by+c < \omega \iff \begin{cases} ax-by+c=0 \quad \text{ou} \\ ax-by+c=1 \quad \text{ou} \\ \dots \\ ax-by+c=\omega-2 \quad \text{ou} \\ ax-by+c=\omega-1 \end{cases}$

Autrement dit les points de la droite discrète sont les solutions des équation diophantiennes qui sont de la forme :

$$ax - by = e$$

où $e = -c$ ou $-c+1$ ou ... ou $-c+\omega-1$.

Problème : Déterminer les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telque

$$ax - by = e \quad (\star)$$

où a, b et e sont des entiers donnés.

Propriétés

- L'équation diophantienne $(\star)$ admet une solution si et seulement si $g = pgcd(a, b)$ divice e.
- $\{(x_0, y_0) + k(\frac{b}{g}, \frac{a}{g}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation diophantienne $(\star)$ où g divise e et (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation diophantienne $(\star)$.

Problème : Comment trouver une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation diophantienne $(\star)$?

Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire

Données : $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \geq a \geq 0$

Considérons la suite des triplets $\vec{v}_i = (t_i, \alpha_i, \beta_i)$ telle que

$\vec{v}_0 = (b, 0, 1)$

$\vec{v}_1 = (a, 1, 0)$

$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_{i-1} - q_{i+1}\vec{v}_i$

où $q_{i+1} = \lfloor \frac{t_{i-1}}{t_i} \rfloor$ est le quotient de la division de t_{i-1} par t_i pour $i \geq 1$.

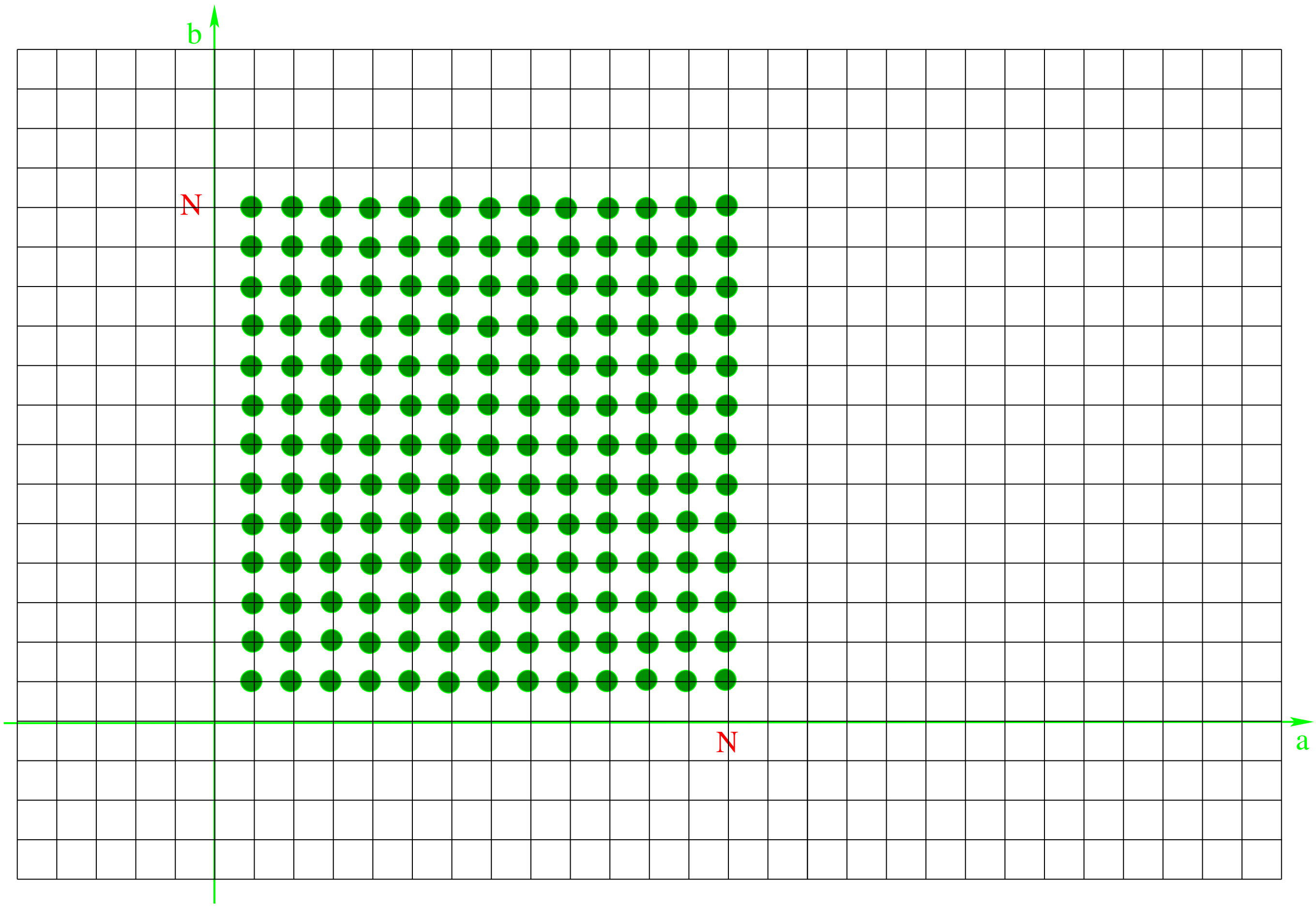
On s'arrête au premier entier n tel que $t_n = 0$.

On a alors

$$pgcd(a, b) = t_{n-1} = \alpha_{n-1} a + \beta_{n-1} b$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_{n-1} = (t_{n-1}, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}).$$

Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire



$NEAE(a,b)$ = nombre d'étapes utilisées par l'algorithme d'Euclide pour calculer le $pgcd(a,b)$.

$$E(N) = \frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} NEAE(a,b) = \frac{12 \ln(2)}{\pi^2} \ln(N) + O(1)$$

$$\approx 0.842765913 \ln(N) + 0.06.$$

Propriétés :
Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

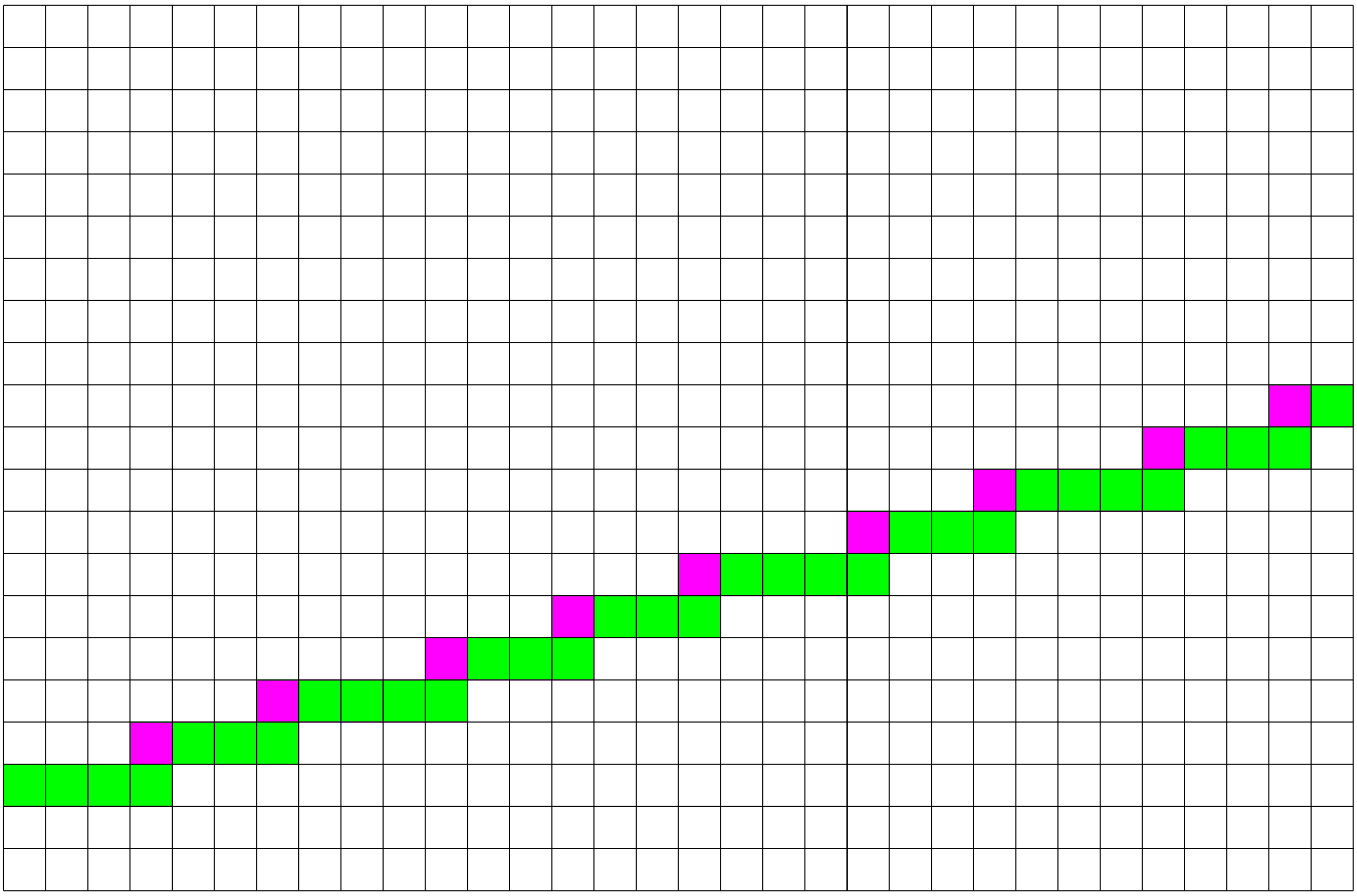
- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 8-connexe si et seulement si $\omega \geq$ sup$(|a|, |b|)$.

- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 4-connexe si et seulement si $\omega \geq |a| + |b|$.

Définitions :
Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

- Si $\omega =$ sup$(|a|, |b|)$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète naïve.

- Si $\omega = |a| + |b|$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète standard.



: La droite naive D(5,17,0,17)

, : La droite standard D(5,17,0,23)