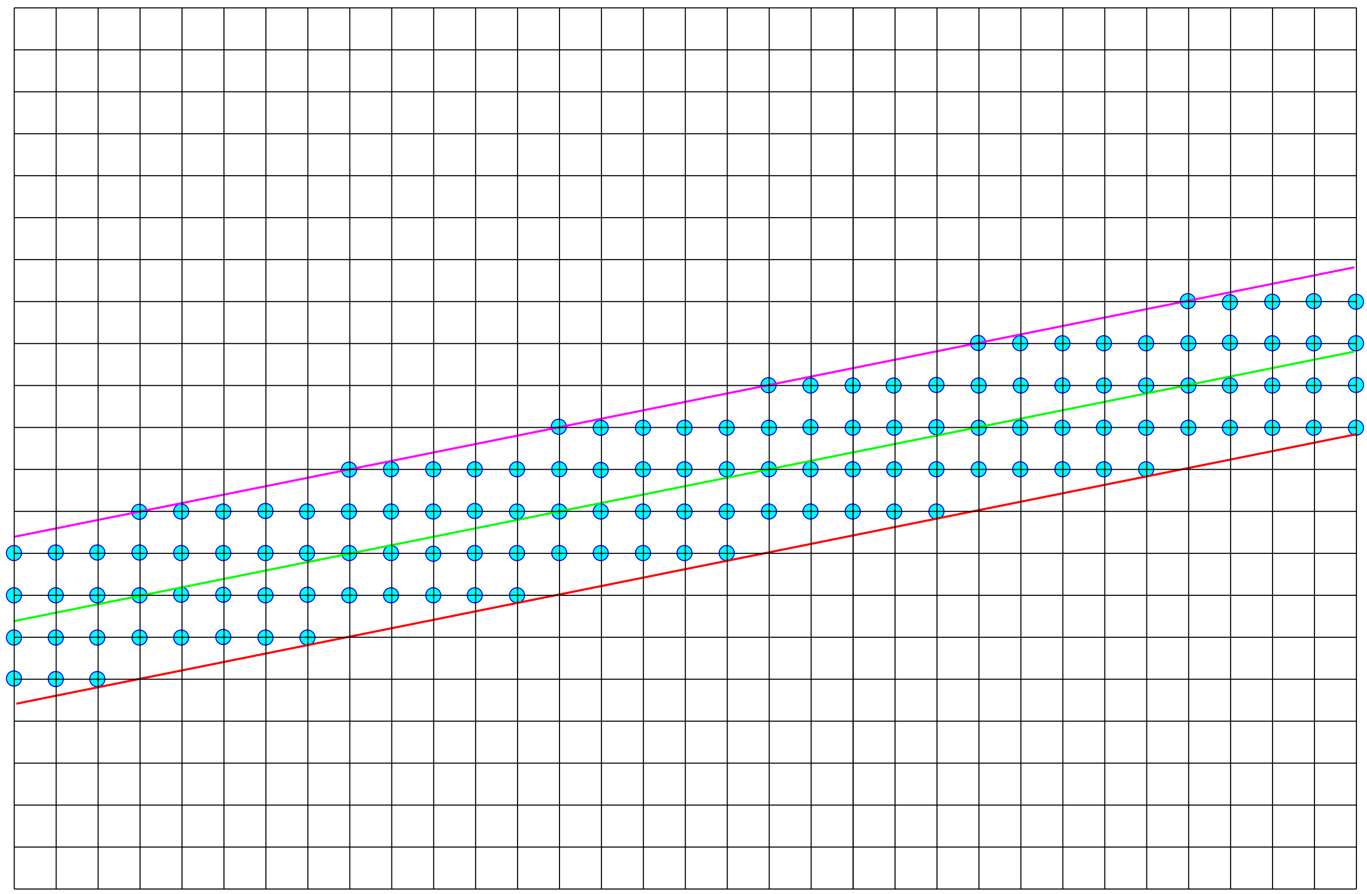
Les Droites discrètes

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$:

$$\mathcal{D}(a, b, c, \omega) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\; | \;\; 0 \leq ax - by + c < \omega\}$$

- $\frac{a}{b}$ est la `pente` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- $(a, -b)$ est le `vecteur normal` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- c est la `phase` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
- ω est l'`épaisseur arithmétique` de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.



Points de la droite discrete D(1,6,12,24) ; La droite reelle : x−6y=0

La droite reelle : x−6y−12=0 ; La droite reelle : x−6y+12=0

- $\mathcal{D}(a,b,c,\omega) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad \lfloor \frac{ax-by+c}{\omega} \rfloor = 0\}$

- $0 \leq ax - by + c < \omega \iff \begin{cases} ax - by + c = 0 \quad \text{ou} \\ ax - by + c = 1 \quad \text{ou} \\ \ldots \\ ax - by + c = \omega - 2 \quad \text{ou} \\ ax - by + c = \omega - 1 \end{cases}$

Autrement dit les points de la droite discrète sont les solutions des équation diophantiennes qui sont de la forme :

$$ax - by = e$$

où $e = -c$ ou $-c+1$ ou ... ou $-c+\omega-1$.

Problème : Déterminer les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telque

$$ax - by = e \quad (\star)$$

où a, b et e sont des entiers donnés.

Propriétés

- L'équation diophantienne $(\star)$ admet une solution si et seulement si $g = pgcd(a, b)$ divice e.
- $\{(x_0, y_0) + k(\frac{b}{g}, \frac{a}{g}) \quad | \quad k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation diophantienne $(\star)$ où g divise e et (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation diophantienne $(\star)$.

Problème : Comment trouver une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation diophantienne $(\star)$?

Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire

Données : $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \geq a \geq 0$

Considérons la suite des triplets $\vec{v}_i = (t_i, \alpha_i, \beta_i)$ telle que

$\vec{v}_0 = (b, 0, 1)$

$\vec{v}_1 = (a, 1, 0)$

$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_{i-1} - q_{i+1}\vec{v}_i$

où $q_{i+1} = \lfloor \frac{t_{i-1}}{t_i} \rfloor$ est le quotient de la division de t_{i-1} par t_i pour $i \geq 1$.

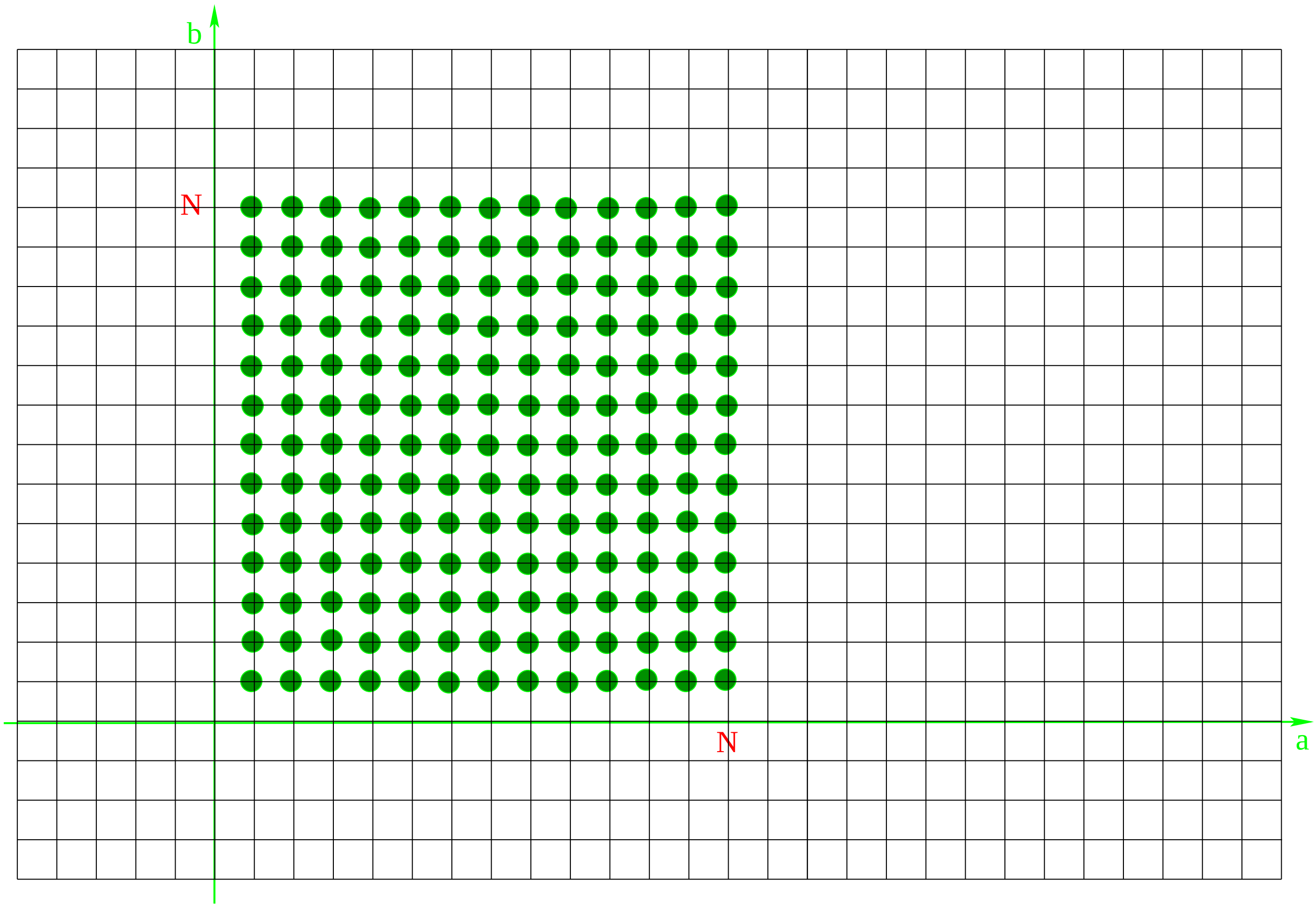
On s'arrête au premier entier n tel que $t_n = 0$.

On a alors

$$pgcd(a, b) = t_{n-1} = \alpha_{n-1}a + \beta_{n-1}b$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_{n-1} = (t_{n-1}, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}).$$

Algorithme d'Euclide avec combinaison linéaire



$NEAE(a,b)$ = nombre d'étapes utilisées par l'algorithme d'Euclide pour calculer le $pgcd(a,b)$.

$$E(N) = \frac{1}{N^2}\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} NEAE(a,b) = \frac{12\ln(2)}{\pi^2}\ln(N) + O(1)$$

$$\approx 0.842765913 \ln(N) + 0.06.$$

Propriétés :

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 8-connexe si et seulement si $\omega \geq$ sup$(|a|, |b|)$.

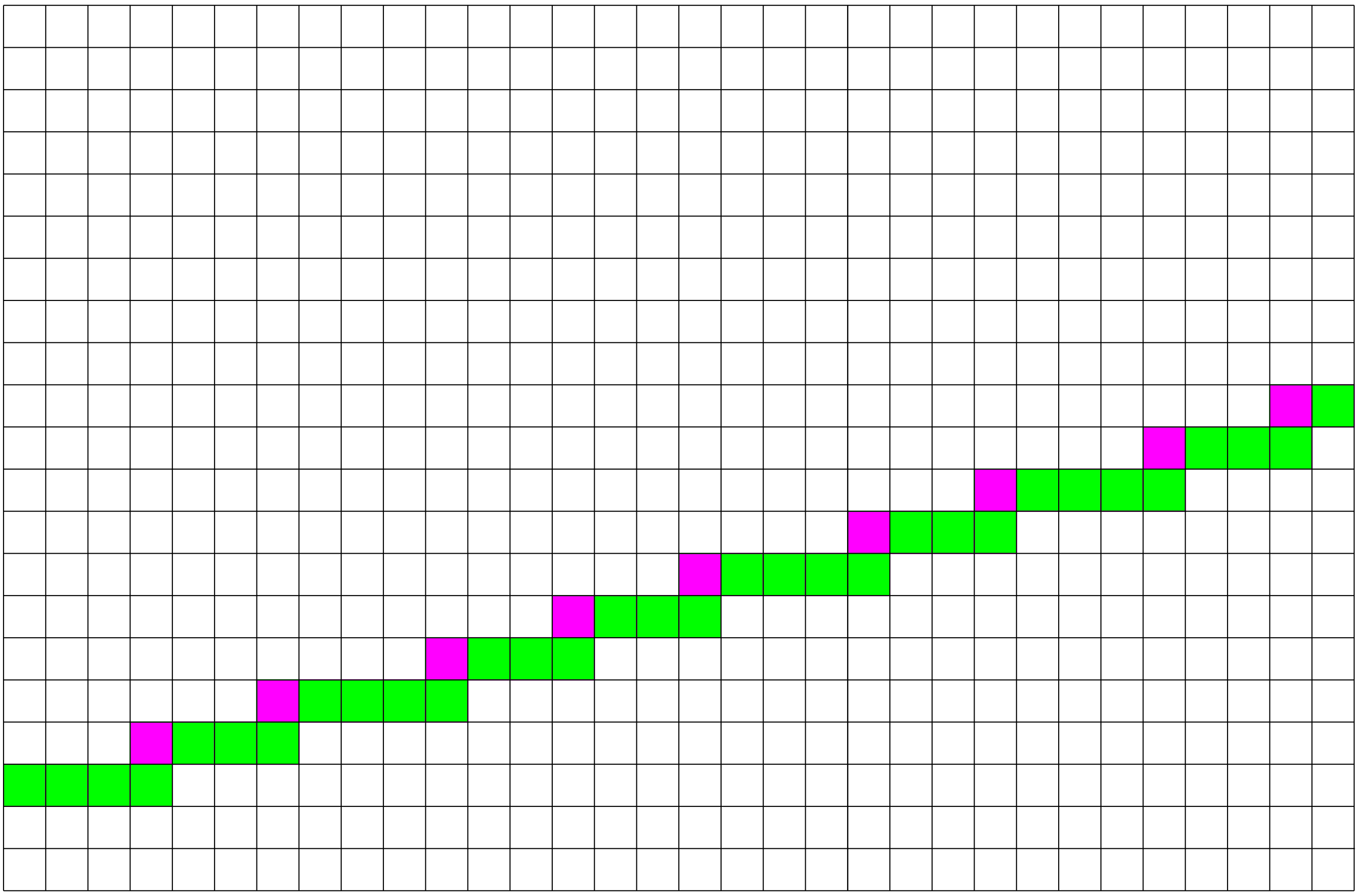
- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est 4-connexe si et seulement si $\omega \geq |a| + |b|$.

Définitions :

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

- Si $\omega =$ sup$(|a|, |b|)$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète naïve.

- Si $\omega = |a| + |b|$, $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est dite une droite discrète standard.



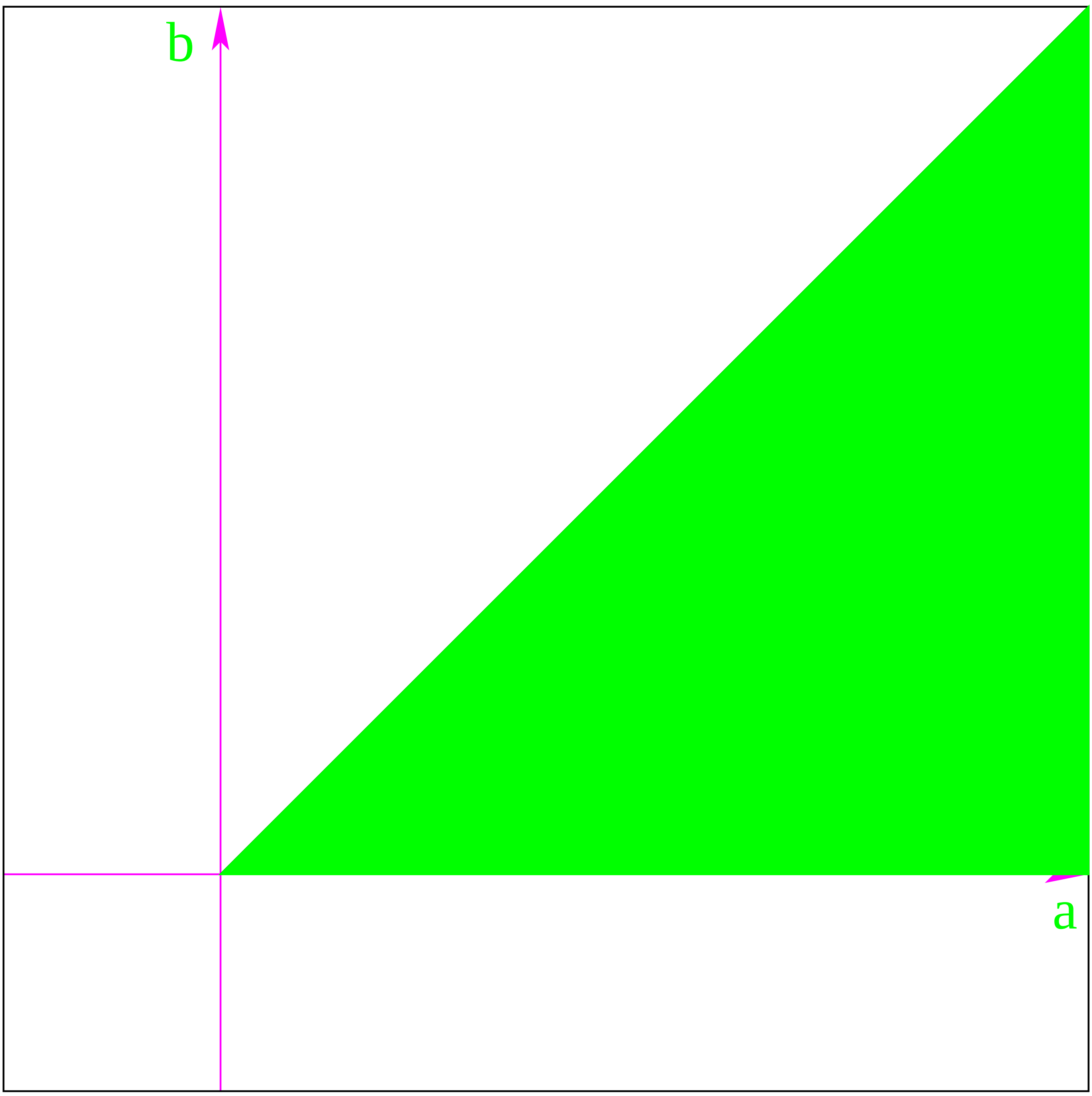
: La droite naive D(5,17,0,17)

, : La droite standard D(5,17,0,23)

Propriétés :
Soit $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ où $a, b, c, \omega \in \mathbb{Z}$ avec $\omega > 0$.

Alors la transormée de $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ par la symétrie par rapport

- à l'axe OX est $\mathcal{D}(a, -b, c, \omega)$,
- à l'axe OY est $\mathcal{D}(-a, b, c, \omega)$,
- à $\vec{O}$ est $\mathcal{D}(-a, -b, c, \omega)$,
- à première bissectrice *(la droite d'équation : y=x)* est $\mathcal{D}(b, a, c, \omega)$.


b
a

Notation :
Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\tau \in \mathbb{R}^n$.

$$X \oplus \tau = \{x + \tau \mid x \in X\}.$$

$X \oplus \tau$ est appelé le translaté de X par le vecteur τ.

Définition :
Deux droites discrètes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites équivalentes s'il existe un vecteur $\tau \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \oplus \tau.$$

Propriétés :
Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Z}$ et ω, ω' des entiers strictement positifs où a, b (respectivement a', b') sont premiers entre eux et $\tau \in \mathbb{Z}^2$. Alors :

- les deux droites discrètes $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ et $\mathcal{D}(a', b', c', \omega')$ sont équivalentes si et seulement si $a = a', b = b'$ et $\omega = \omega'$.
- $\mathcal{D}(a, b, c, \omega) = \mathcal{D}(a, b, c, \omega) \oplus \tau$ si et seulement si $\tau = k(b, a)$ pour $k \in \mathbb{Z}$

Conclusions : (Translation et périodicité)

- Si a, b sont deux nombres entiers premiers entre eux alors pour tout $c \in \mathbb{Z}$ et tout entier strictement positif ω la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est équivalente à la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, 0, \omega)$.
- Soit $\mathcal{PD}(a, b, c, \omega) = \{(x, y) \in \mathcal{D}(a, b, c, \omega) \mid 0 \leq x < \omega\}$. Alors

$$\mathcal{D}(a, b, c, \omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PD}(a, b, c, \omega) \oplus k(b, a).$$

Autrement dit la construction de l'ensemble fini $\mathcal{PD}(a, b, c, \omega)$ détermine complétement la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$!

Notations :

- $\mathcal{SL}(2,\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\mid\; a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et $ad - bc = 1\}$.
- Soient $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et $M \in \mathcal{SL}(2,\mathbb{Z})$.

$$MX = \{Mx \mid x \in X\}.$$

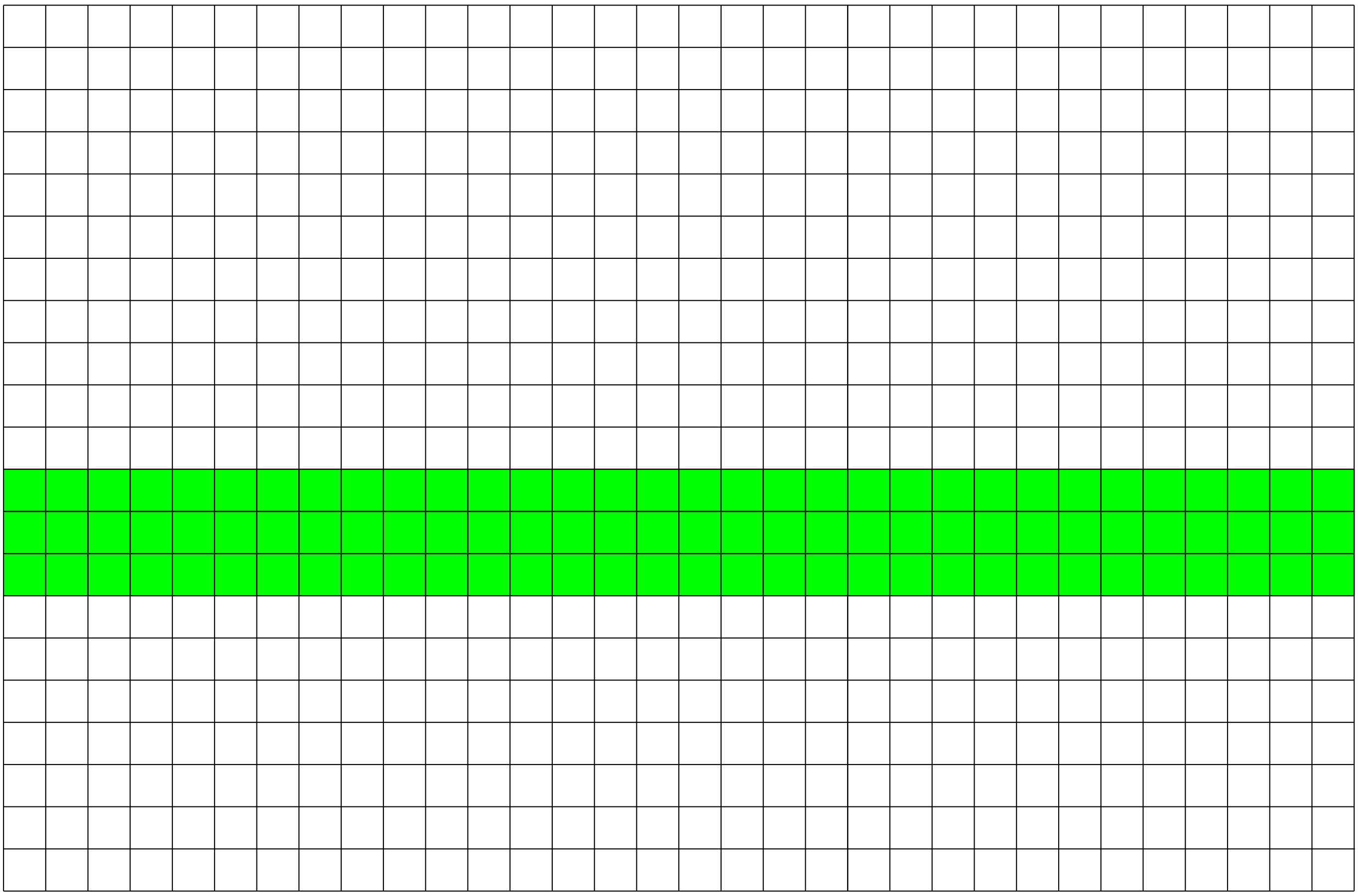
Définition :
Deux droites discrètes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites homologue s'il existe une matrice $M \in \mathcal{SL}(2,\mathbb{Z})$ telle que

$$\mathcal{D}' = M\mathcal{D}.$$

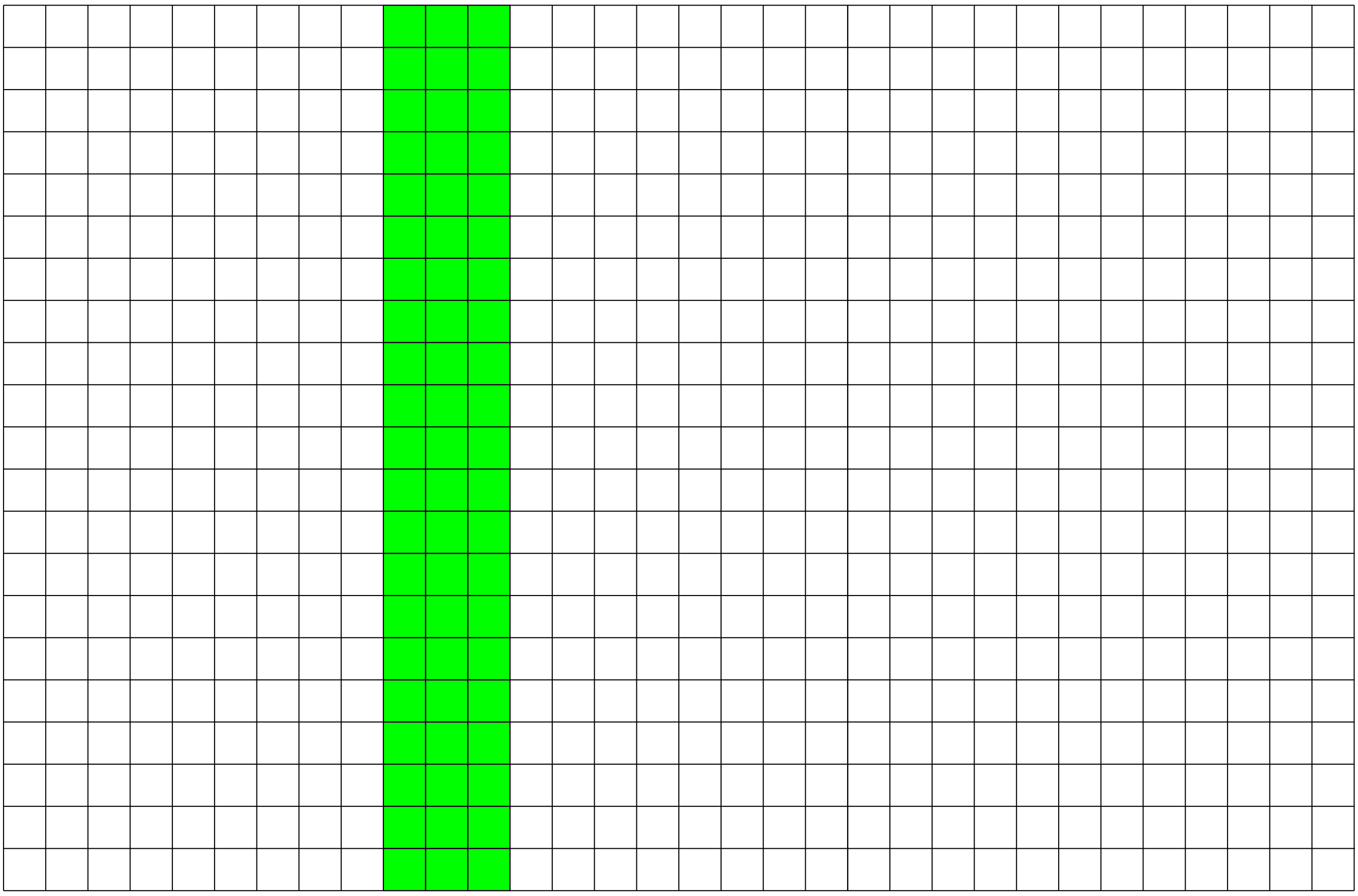
Propriétés :
Soient $a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{Z}$ et ω,ω' des entiers strictement positifs où a,b (respectivement a',b') sont premiers entre eux et $\tau \in \mathbb{Z}^2$. Alors, les deux droites discrètes $\mathcal{D}(a,b,c,\omega)$ et $\mathcal{D}(a',b',c',\omega')$ sont homologues si et seulement si $c = c'$ et $\omega = \omega'$.

Conclusions : (Paramètrisation)

- Si a, b sont deux nombres entiers premiers entre eux alors pour tout $c \in \mathbb{Z}$ et tout entier strictement positif ω la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est homologue à la droite discrète verticale $\mathcal{D}(1, 0, c, \omega)$.
- Si a, b sont deux nombres entiers premiers entre eux alors pour tout $c \in \mathbb{Z}$ et tout entier strictement positif ω la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$ est homologue à la droite discrète horizontale $\mathcal{D}(1, 0, c, \omega)$.



: La droite discrete horizontale D(0,−1,0,3)



La droite discrete verticale D(1,0,0,3)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq a \leq b$ et $pgcd(a, b) = 1$.

Notations :

- $y(x) = \lfloor \frac{ax}{b} \rfloor$.
- $r(x) = \{ \frac{ax}{b} \}$.

Propriétés :

- $\mathcal{D}(a, b, 0, b) = \{(x, y(x)) \mid x \in \mathbb{Z}\}$,
- $y(x + b) = a + y(x) \ \forall x \in \mathbb{Z}$,
- $r(x + b) = r(x) \ \forall x \in \mathbb{Z}$,
- $r(x) \neq r(y)$ pour tout $0 \leq x < y < b$ et
- $\{r(x) \mid 0 \leq x < b\} = \{0, 1, 2, ..., b - 1\}$.

Définitions :

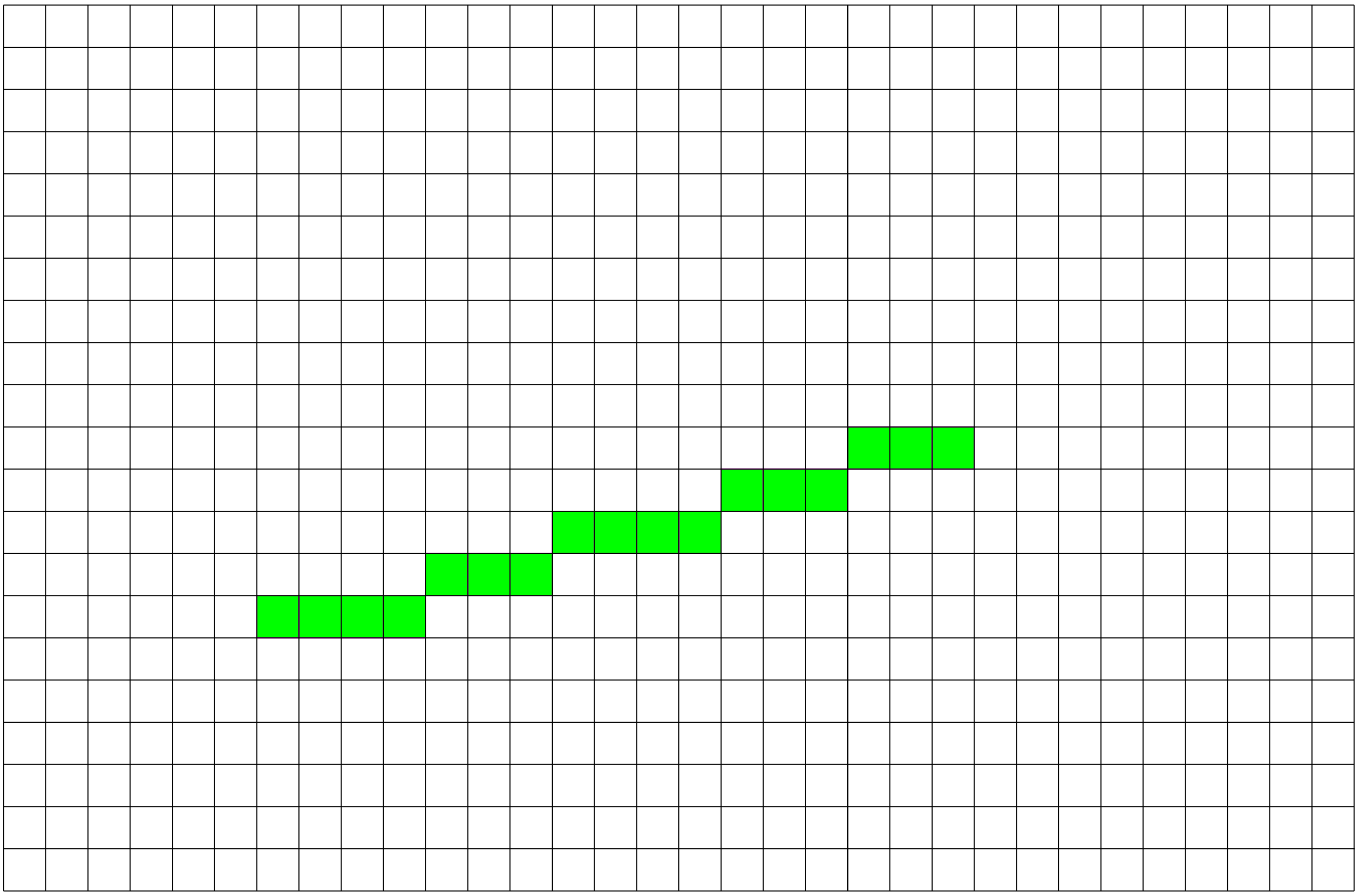
Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

- Si $r(\alpha - 1) > r(\alpha) < r(\alpha + 1) < ... < r(\alpha + k) > r(\alpha + k + 1)$ alors la suite $r(\alpha), r(\alpha + 1), ..., r(\alpha + k)$ est dite une **`séquence montante`** de la suite $r(0), r(1), ..., r(b - 1)$.
  $r(\alpha)$ *(respectivement* $r(\alpha + k)$*)* est appelé le **`début`** *(respectivement la* **`fin`***)* de la séquence montante et $k + 1$ est appelé la **`longueur`** de la séquence montante.

- Si $y(\alpha - 1) \neq y(\alpha) = y(\alpha + 1) = ... = y(\alpha + k) \neq y(\alpha + k + 1)$ alors la suite $(\alpha, y(\alpha)), (\alpha + 1, y(\alpha + 1), ..., (\alpha + k, y(\alpha + k))$ est dite un **`palier`** de la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.
  $(\alpha, y(\alpha))$ *(respectivement* $(\alpha + k, y(\alpha + k))$*)* est appelé le **`début`** *(respectivement la* **`fin`***)* du palier et $k + 1$ est appelé la **`longueur`** du palier.

Les paliers et les séquences montantes de la droite discrète naïve $\mathcal{D}(5, 17, 0, 17)$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\lfloor \frac{5i}{17} \rfloor$	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4
$\{ \frac{5i}{17} \}$	0	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12



Propriétés

- Une séquence montante commence par une valeur qui appartient à l'intervalle $[0, a[$ et se termine par une valeur qui appartient à l'intervalle $[b - a, b[$.

- Les longueurs des paliers sont égales à $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ ou $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor + 1$.

- L'entier i est un début *(resp. une fin)* de palier ssi $0 \leq \{\frac{ai}{b}\} < a$ *(resp.* $b - a \leq \{\frac{ai}{b}\} < b$*)*.

- Le premier palier est long et le dernier est court.

- Une séquence montante est longue ssi son premier terme appartient à l'intervale $[0, \{\frac{b}{a}\}[$.

- Une séquence montante est courte ssi son premier terme appartient à l'intervale $[\{\frac{b}{a}\}, a[$.

- La suite des début des séquences montantes est la suite
$$\left\{ \frac{(a-\{\frac{b}{a}\})i}{a} \right\}$$
- Le nombre de paliers longs est $\{\frac{b}{a}\}$ et le nombre de palier courts est $a - \{\frac{b}{a}\}$.

- Dans le mot de palier la lettre non dominante est isolée
$\longrightarrow$ *il ne peut pas y avoir deux lettres non dominantes consécutives.*

Algorithme de parcourt des points de la droite naïve $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.

Début

$X := 0$; $Y := 0$; $r := 0$ ($c + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - 1$ pour la droite de Bresenham correspondant à la droite réelle : $ax - by + c = 0$)

Pour $i = 0$ à $b - 1$ faire

début

si $r < b - a$ alors

début

$r := r + a$;

$X := X + 1$;

fin

sinon

début

$r := r - b + a$;

$X := X + 1$;

$Y := Y + 1$;

fin

fin

Fin

Algorithme de tracé par palier de la droite naïve $\mathcal{D}(a, b, c, \omega)$.

Début

$X := 0$; $Y := 0$; $R := 0$

Pour $i = 1$ à a faire

début

si $R < \{\frac{b}{a}\}$ alors

début

Tracer un palier long (de longeur $\lfloor\frac{b}{a}\rfloor + 1$) ;

$X := X + \lfloor\frac{b}{a}\rfloor + 1$;

$R := R + a - \{\frac{b}{a}\}$;

fin

sinon

début

Tracer un palier court (de longeur $\lfloor\frac{b}{a}\rfloor$) ;

$X := X + \lfloor\frac{b}{a}\rfloor$;

$R := R - \{\frac{b}{a}\}$;

fin

fin

Fin

Droites discrètes et fractions continues

Notation :

Soient $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ une suite finie de nombres réels strictement positifs sauf peut-être x_0 qui positif, négatif ou nul.

$$[x_0; x_1; x_2; ...; x_m] = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots \; x_{n-1} + \cfrac{1}{x_m}}}}$$

Autrement dit on a :

- $[x_0] = x_0$.

- Pour $m \geq 2$ on a :

$$[x_0; x_1; x_2; ...; x_m] = x_0 + \frac{1}{[x_1; x_2; ...; x_m]}.$$

Remarques :

- Pour $m \geq 2$ on a :

  $$[x_0; x_1; ...; x_{m-1}; x_m] = [x_0; x_1; ...; x_{m-1} + \frac{1}{x_m}].$$

- Si $xm > 1$ alors

  $$[x_0; x_1; x_2; ...; x_m] = [x_0; x_1; x_2; ...; x_m - 1; 1].$$

Théorème : (Unicité)
Soient $a_0, a_1, ..., a_m$ et $b_0, b_1, ..., b_n$ deux suites finies de nombre stictement positifs (sauf peut-être a_0 et b_0 qui sont d'une façon indépendantes positifs, négatifs ou nuls) tels que $a_m > 1$ et $b_n > 1$. Alors,

$$[a_0; a_1; ...; a_m] = [b_0; b_1; ...; b_n] \iff \begin{cases} m = n & \text{et} \\ a_i = b_i & \text{pour } 1 \leq \end{cases}$$

Remarques :

- Soient $x_0, x_1, ..., x_m$ une suite finie de nombres entiers strictement positifs sauf peut-être x_0 qui est positif, négatif ou nul. Alors, $[x_0; x_1; x_2; ...; x_m] \in \mathbb{Q}$.
- Réciproquement, si $r \in \mathbb{Q}$ *(i.e.* $r = \frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{N}^\star$ *)* alors il existe $x_0, x_1, ..., x_m$ une suite finie de nombres entiers strictement positifs sauf peut-être x_0 qui positif, négatif ou nul telle que $r = [x_0; x_1; x_2; ...; x_m]$. En effet, posons $r_0 = r = \frac{a}{b}$. Alors $x_0 = \lfloor r_0 \rfloor$ et pour tout $i \geq 1$, si $r_i = \frac{1}{r_{i-1} - x_{i-1}}$, alors $x_i = \lfloor r_i \rfloor$.

Fractions continues infinies

Soient $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ une suite infini d'entiers strictement positifs sauf peut-être a_0 qui est soit positif, soit négatif, soit nul *(i.e.* $a_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $a_n \in \mathbb{N}^\star$ *pour tout* $n \geq 1$*)* et soient $(h_i)_{i\geq -2}$ et $(k_i)_{i\geq -2}$ deux suites d'entiers définies par :

$$\begin{cases} h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1 \text{ et } h_i = a_i * h_{i-1} + h_{i-2} \text{ pour } i \geq 0 \\ k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0 \text{ et } k_i = a_i * k_{i-1} + k_{i-2} \text{ pour } i \geq 0 \end{cases}$$

Remarques :

- $(h_i)_{i\geq 0}$ est une suite strictement croissante *(i.e.* $h_0 < h_1 < ... < h_n < h_{n+1} < ....$*)*.
- $(k_i)_{i\geq 0}$ est une suite croissante avec $0 \leq k_0 \leq k_1$ et $k_n < k_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Propriétés :

Soient $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ une suite infini d'entiers strictement positifs sauf peut-être a_0 qui est soit positif, soit négatif, soit nul.
Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

1. $[a_0; a_1; ...; a_{n-1}; x] = \frac{x*h_{n-1} + h_{n-2}}{x*k_{n-1} + k_{n-2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $[a_0; a_1; ...; a_n] = \frac{h_n}{k_n} = r_n$. r_n est appelé le convergent d'ordre n.
3. $h_i * k_{i-1} - h_{i-1} * k_i = (-1)^{i-1}$ et $r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i*k_{i-1}}$ pour tout $i \geq 1$.
4. $h_i * k_{i-2} - h_{i-2} * k_i = (-1)^i * a_i$ et $r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i*a_i}{k_i*k_{i-2}}$ pour tout $i \geq 1$.
5. $r_{2i} < r_{2(i+1)}$, $r_{2(i+1)+1} < r_{2i+1}$ et $r_{2i} < r_{2j+1}$ pour tous entiers positifs i, j. Autrement dit, la suite des termes d'indices pairs $(r_{2i})_{i\geq 0}$ est une suite strictement croissante, la suite des termes d'indices impairs $(r_{2i+1})_{i\geq 0}$ est une suite strictement décroissante et chaque terme d'indice pair est strictement inférieur à chaque terme d'indice impair de la suite $(r_n)_{n\geq 0}$.

Corollaire :
$(r_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergentz et sa limite sera notée $[a_0; a_1; ...; a_n; ...]$. Autrement dit,

$$[a_0; a_1; ...; a_n; ...] = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1; ...; a_n].$$

Mots se Sturm :

Si $\frac{a}{b} = [0, q_0; q_1; ...; q_n]$.

Posons

0	$\alpha = m^{q_0 - 1}$	$\beta_1 = m^{q_0 - 1} d$	$\gamma_1 = m^{q_0} d$
1	$\alpha_1 = \beta_1^{q_1 - 1}$	$\beta_2 = \beta_1^{q_1 - 1} \gamma_1$	$\gamma_2 = \beta_1^{q_1} \gamma_1$
...	...	...	...
i	$\alpha_i = \beta_i^{q_i - 1}$	$\beta_{i+1} = \beta_i^{q_i - 1} \gamma_i$	$\gamma_{i+1} = \beta_i^{q_i} \gamma_i$
...	...	...	...

Alors

$$Sturm(\frac{a}{b}) = m\beta_1\beta_2...\beta_{n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}....\alpha_2\alpha_1\alpha d$$

$\frac{7}{24} = [0; 3; 2; 3]$. On a alors :

0	$\alpha = m^{3-1} = mm$	$\beta_1 = m^{3-1}d = mmd$	$\gamma_1 = m^3 d$
1	$\alpha_1 = \beta_1^{2-1} = \beta_1$	$\beta_2 = \beta_1^{2-1}\gamma_1 = \beta_1\gamma_1$	$\gamma_2 = \beta_1^2\gamma_1$
2	$\alpha_2 = \beta_i^{3-1} = \beta_i^2$	$\beta_3 = \beta_2^{3-1}\gamma_2 = \beta_2^2\gamma_2$	$\gamma_3 = \beta_2^3\gamma_2$

Donc

$$\begin{aligned} Sturm(\tfrac{7}{24}) &= m\beta_1\alpha_2\alpha_1\alpha d \\ &= mmmdmmdmmmdmmdmmmdmmdmmd \end{aligned}$$