UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département d'Informatique
LICENCE 3ème année
Examen de combinatoire
Lundi 19 février 2018

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

I.

Soient $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ un alphabet à 3 lettres et n un entier strictement positif.

1. Pour $n = 3$, $n = 4$ puis $n = 5$ donner le nombre de mot de longueur n contenant autant d'occurrences de la lettre a, que de la lettre b.

   Réponse :
   - Pour $n = 3$, les mots en question sont : $ccc, abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Il y en a donc 7.
   - Pour $n = 4$, les mots en question sont : $cccc, abcc, acbc, bacc, bcac, cabc, cbac, ccba, ccab, accb, bcca, cacb, cbca, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa$. Il y en a donc 19.
   - Pour $n = 5$, les mots en question contiennent donc soit 0 occurrences de a et 0 occurrences de b et donc 5 occurrences de c, soit 1 occurrence de a et 1 occurrence de b et donc 3 occurrences de c, soit 2 occurrences de a et 2 occurrences de b et donc 1 occurrence de c. Il y en a donc, d'après les formules vues en cours,

   $$\binom{5}{0,0,5} + \binom{5}{1,1,3} + \binom{5}{2,2,1} = 51$$

   .

2. Pour n quelconque donner le nombre de mots de longueur n contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b.

   Réponse : Les mots en question contiennent donc soit 0 occurrences de a et 0 occurrences de b et donc n occurrences de c, soit 1 occurrence de a et 1 occurrence de b et donc $n-2$ occurrences de c si $2 \leq n$, soit 2 occurrences de a et 2 occurrences de b et donc $n-4$ occurrences de c si $4 \leq n$, ..., soit i occurrrences de a et i occurrences de b et donc $n - 2 * i$ occurrences de c pour $2 * i \leq n$ etc.. Il y en a donc, d'après les formules vues en cours,

   $$\sum_{0 \leq i \leq n/2} \binom{n}{i, i, n-2*i}.$$

   .

3. Pour $n = 3$, $n = 4$ puis $n = 5$ donner le nombre de mot de longueur n contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c.

   Réponse :
   - Pour $n = 3$, les mots en question sont : $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Il y en a donc 6.
   - Pour $n = 4$, il n y a aucun mot contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c. Il y en a donc 0.
   - Pour $n = 5$, il n y a aucun mot contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c. Il y en a donc 0.

4. Pour n quelconque donner le nombre de mots de longueur n contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c.

Réponse : Pour n non divisible par 3 il n y a aucun mot contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c. Il y en a donc 0.
Pour n divisible par 3, d'après les formules vues en cours, il y a $\binom{n}{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$ mots contenant autant d'occurrences de la lettre a que de la lettre b que de la lettre c.

II.

Pour tout entier strictement positif n, $d(n)$ est l'unique entier tel que $n = 2^{d(n)}(2*k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$ *(i.e. $d(n)$ est le nombre d'occurrences du facteur premier 2 dans la représentation de n comme produit de facteurs premiers et $2*k+1$ est le facteur impair de n)* et $S(n)$ est le nombre d'occurrences du chiffre 1 dans la représentation de n en base deux.

1. Calculer $d(n)$ et $S(n)$ pour $n = 3, 4, 5, 24$ puis 120 *(i.e. ces nombres sont représentés en base dix ; $4! = 24$ et $5! = 120$)*.

Réponse :
- Comme $3 = 2^0(2*1+1) = (11)_2$ *(i.e. $(11)_2$ est la représentation en base deux de 3)*, alors $d(3) = 0$ et $S(3) = 2$.
- Comme $4 = 2^2(2*0+1) = (100)_2$, alors $d(4) = 2$ et $S(4) = 1$.
- Comme $5 = 2^0(2*2+1) = (101)_2$, alors $d(5) = 0$ et $S(5) = 2$.
- Comme $4! = 24 = 2^3(2*1+1) = (11000)_2$, alors $d(24) = 3 = 4 - S(4)$ et $S(24) = 2$.
- Comme $5! = 120 = 2^3(2*7+1) = (1111000)_2$, alors $d(120) = 3 = 5 - S(5)$ et $S(120) = 4$.

2. Montrer que pour tout entier $i, r, s \in \mathbb{N}^*, d(2*i+1) = 0, d(2*i) = 1 + d(i)$ et $d(r*s) = d(r) + d(s)$.

Réponse :
- Si n est impair et donc $n = 2*i+1 = 2^0(2*i+1)$ pour un certain entier i, alors $d(n) = 0$.
- Si n est pair et donc $n = 2*i = 2*2^{d(i)}(2*k+1) = 2^{d(i)+1}(2*k+1)$ pour un certain entier i et un certain entier k, alors $d(2*i) = 1 + d(i)$.
- Si $n = r*s = (2^{d(r)}*(2*k_1+1))*(2^{d(s)}*(2*k_2+1)) = 2^{d(r)+d(s)}(2*(\ 2*k_1*k_2+k_1+k_2\ )+1)$ pour un certain entier k_1 et un certain entier k_2, alors $d(n) = d(r) + d(s)$.

3. Démontrer que pour tout entier stritement postif n, on a $d(n!) = n - S(n)$.

Réponse : Pour $n \geq 1$, d'après la question précédente, on a $d(n!) = d(n*(n-1)!) = d(n) + d((n-1)!)$ et supposons par hypothèse de récurrence que $d((n-1)!) = (n-1) - S(n-1)$.
Supposons que $n - 1 = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1)_2$ *(i.e. $n - 1 = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i * 2^{i-1}$ et $a_i \in \{0,1\}$ pour $1 \leq i \leq k$. Autrement dit, $(a_k a_{k-1} ... a_2 a_1)_2$ est la représentation en base 2 de $n-1$.)* et posons

$$h = \max(\{i \mid a_j = 1 \text{ pour tout } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq i\})$$

(i.e. par exemple, $h = 0$ si $a_1 = 0$) donc
- si $h = 0$ *(i.e. $n-1$ est pair et donc n est impair)*, alors $d(n) = 0$ et $S(n) = S(n-1)+1$ par conséquent, $d(n!) = d(n) + d((n-1)!) = 0 + (n-1) - S(n-1) = n - (S(n-1)+1) = n - S(n)$ et
- si $h > 0$, alors $n - 1$ est impair et $d(n) = h$ et $S(n) = S(n-1) - h + 1$ et donc $d(n!) = d(n) + d((n-1)!) = h + (n-1) - S(n-1) = n - (S(n-1) - h + 1) = n - S(n)$.

III

Soit n un entier positif. Supposons que $2n$ personnes font la queue au guichet d'un théâtre. Le billet d'entrée coûte 10€, parmi ces $2n$ personnes n n'ont que des billets de 10€ et n personnes n'ont que des billets de 20€. On suppose en plus qu'il n y pas d'argents dans la caisse à l'ouverture du guichet.
Remarque : La queue peut être modélisée par un mot de longuer $2n$ sur l'alphabet à deux lettres $\{d, v\}$: d pour representer une personne qui n'a que des billets de 10€ et v pour représenter une personne qui n'a que des billets de 20€. On note T_n le nombre de façon, pour 2n clients, pour que la ventre de billets

se déroule sans aucun inteblocage.
Par exemple, pour $n = 1$, si la queue $q = dv$, alors il n y aura pas de blocage, car le premier client va payer son billet avec 10€ et lorsque le deuxième client arrive avec un billet de 20€ la caisse contient déjà les 10€ du premier client et donc le caissier poura lui rendre la monnaie ; par contre si la queue $q = vd$, alors comme le premier client n'a que des billets de 20€ et comme la caisse au départ est vide alors le caissier ne pourra pas lui rendre la monnaie et donc il y aura inteblocage.

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.

   Réponse :
   - Pour $n = 2$, les queues possibles sont : $ddvv, dvdv$ et donc $T_2 = 2$.
   - Pour $n = 3$, les queues possibles sont : $dddvvv, ddvvdv, ddvdvv, dvddvv, dvdvdv$ et donc $T_3 = 5$.
   - Pour $n = 4$, les queues possibles sont : $ddddvvvv, dddvvvdv, dddvdvvv, ddvddvvv, ddvdvdvv, dvdddvvv, dvddvdvv, ddvvddvv, dvdvddvv, dddvvvdv, ddvvdvdv, ddvdvvdv, dvddvvdv, dvdvdvdv$
   et donc $T_4 = 14 = T_0 * T_3 + T_1 * T_2 + T_2 * T_1 + T_3 * T_0$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-1-i}.$$

   Réponse : Pour une queue q de longuer $2n$, appelons t le premier instant où la caisse ne contient que des billets de 20€ et donc à cet instant t il y aura autant de personnes avec 10€ que 20€ qui ont déjà acheté leurs billets (i.e. $t = 2 * j$) et par conséquent, $q = q'q''$ avec
   - q' est une queue de longeur $t = 2j$ sans inerblocage avec j personnes qui n'ont que des billets de 10€ et j personnes qui n'ont que des billets de 20€ et
   - q'' est une queue de longeur $2n - t = 2n - 2j = 2(n - j)$ sans inerblocage avec $n - j$ personnes qui n'ont que des billets de 10€ et $n - j$ personnes qui n'ont que des billets de 20€. En effet, une caisse ne contenant que des billets de 20€ peut-être considérées comme un caisse vide car à cet instant, le caissier ne peut pas rendre la monnaie à un client qui n'a que des billets de 20€!

   Remarque : Comme q' est une queue correspondant au premier instant où la caisse ne contient que des billets de 20€ alors $q' = dq'''v$ où q''' est une queue sans interblocage contennat $(j - 1)$ personnes qui n'ont que des billets de 10€ et $(j - 1)$ personnes qui n'ont que des billets de 20€!
   D'après ce qui précède on a

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} T_{j-1} T_{n-j} = \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-1-i}.$$

   Remarque : Dans la formule précédante T_{j-1} correpond aux différentes configurations de q''' et T_{n-j} correpond aux différentes configurations de q''.

3. En déduire, une formule explicite de T_n pour tout entier strictement positif n.
   Indication : on pourrait trouver un lien entre la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ est le développement en série de la fonction $\sqrt{1 - 4x^2}$.

Réponse : Posons $f(x) = \sum_{n\geq 0} T_n x^{2n}$. Alors,

$$f(x) = 1 + x^2 + \sum_{n\geq 2} T_n x^{2n} = 1 + x^2(1 + \sum_{n\geq 2} \sum_{i=0}^{n-1} (T_i x^{2i})(T_{n-1-i} x^{2(n-1-i)})) = 1 + x^2(f(x))^2.$$

La fonction f vérifie donc la relation :

$$x^2(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0.$$

Donc

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Après le calcul, on obtient :

$$T_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

IV.

Soient n et k des entiers strictement positifs et $A = \{a_1, ..., a_n\}$ respectivement $B = \{b_1, ..., b_k\}$ deux ensembles de cardinal n respectivement k. Posons $S(n,k)$ l'ensemble des applications surjectives de A dans B et $s(n,k) = Card(S(n,k))$.
Pour $1 \leq i \leq k$, posons $\mathcal{F}(A,B,b_i) = \{f : A \mapsto B \mid b_i \notin Image(f)\}$ où $Image(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

1. Calculer $s(2,2), s(3,2), s(4,3)$.

   Réponse :
   - De $A = \{a_1, a_2\}$ à $B = \{b_1, b_2\}$ il n y a que deux surjections possibles qui sont en fait des bijections, on a donc $s(2,2) = 2$.
   - De $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ à $B = \{b_1, b_2\}$ il n y a que 6 surjections possibles. En effet, deux éléments de A parmi 3 ont la même image (b_1 ou b_2) et le troisième à une image différente de l'image de ces deux autres éléments et donc $s(3,2) = 6$.
   - De $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ à $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ il n y a que 36 surjections possibles. En effet, chacun des éléments de B peux avoir deux antécédants dans A et les deux autres éléments de B ont chacun un seul antécédant et donc $s(4,3) = 36$.

2. Montrer que, pour $n, k \in \mathbb{N}^*, s(n,k) = 0$ si $k > n$.

   Réponse : Si $Card(B) > Card(A)$, alors il n y a pas de surjection de A dans B et donc $s(n,k) = 0$.

3. Pour i tel que $1 \leq i \leq k$, calculer $Card(\mathcal{F}(A,B,b_i))$.

   Réponse : $\mathcal{F}(A,B,b_i)$ est l'ensemble des applications de A dans $(B \setminus \{b_i\})$ et donc $\mathcal{F}(A,B,b_i) = (B \setminus \{b_i\})^A$ et par conséquent, $Card(\mathcal{F}(A,B,b_i)) = (k-1)^n$.

4. En utilisant la formule d'inclusion-exclusion vue en cours, calculer $Card(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{F}(A,B,b_i))$.
   Réponse :

   $$Card(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{F}(A,B,b_i)) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_j \leq k} Card(\mathcal{F}(A,B,b_{i_1}) \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_2}) \cap ... \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_j})).$$

   Comme $\mathcal{F}(A,B,b_{i_1}) \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_2}) \cap ... \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_j})$ est l'ensemble des applications de A dans $B \setminus \{b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_j}\}$, alors $\mathcal{F}(A,B,b_{i_1}) \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_2}) \cap ... \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_j}) = (B \setminus \{b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_j}\})^A$ et par conséquent, $Card(\mathcal{F}(A,B,b_{i_1}) \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_2}) \cap ... \cap \mathcal{F}(A,B,b_{i_j})) = (k-j)^n$ et donc

   $$Card(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{F}(A,B,b_i)) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

5. Déduire de ce qui précède une formule pour $s(n,k)$ pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$.

   Réponse : $S(n,k) = B^A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{F}(A,B,b_i)$ et donc si $k \leq n$, on a :

   $$Card(S(n,k)) = s(n,k) = Card(B^A) - Card(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{F}(A,B,b_i)) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

6. Déduire de ce qui précède le nombre de relations d'équivalence sur A comportant k classes d'équivalences pour tout ensemble A de cardinal n pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Réponse : Si $f \in S(n,k)$, alors $f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), ..., f^{-1}(b_k)$ est une partition de A en k parties et donc correpond à une relations d'équivalence sur A avec k classes d'équivalences. Cette partition peut être obtenue de k ! façons différentes en échangeant les rôles des éléments $b_1, b_2, ..., b_k$ de B et réciproquement, à toute partition de A en k parties on peux associer $k!$ surjections de A dans B et par conséquent, le nombre de relations d'équivalence sur A comportant k classes d'équivalences est égal à

$$\frac{Card(S(n,k))}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{(k-j)^n}{j!(k-j)!}.$$