Déduction naturelle et termes de preuves

1 Logique propositionnelle et preuves formelles

1- Pour chacun des énoncés suivants, proposer en déduction naturelle intuitionniste une démonstration arborescente, puis la transcrire en une suite de tactiques acceptables par `Coq`.
On rappelle que $A \longleftrightarrow B$ est défini par $A \rightarrow B \land B \rightarrow A$.

- $A \lor B \longrightarrow B \lor A$
- $(A \land B \rightarrow C) \longleftrightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)$
- $(A \land (B \lor C)) \longleftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$
- $(A \rightarrow (B \land C)) \longleftrightarrow (A \rightarrow B) \land (A \rightarrow C)$

2- Construire un terme du λ-calcul représentant une démonstration pour chacun des énoncés de la question précédente. On rappelle que l'on dispose pour cela des fonctions suivantes :

`or_introl`	$\forall A\ B : \texttt{Prop}, A \rightarrow A \lor B$
`or_intror`	$\forall A\ B : \texttt{Prop}, B \rightarrow A \lor B$
`or_ind`	$\forall A\ B\ P : \texttt{Prop}, (A \rightarrow P) \rightarrow (B \rightarrow P) \rightarrow A \lor B \rightarrow P$
`conj`	$\forall A\ B : \texttt{Prop}, A \rightarrow B \rightarrow A \land B$
`and_ind`	$\forall A\ B\ P : \texttt{Prop}, (A \rightarrow B \rightarrow P) \rightarrow A \land B \rightarrow P$

2 Logique du premier ordre

On rappelle les règles logiques pour la quantification universelle et la quantification existentielle :

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash \forall x : A, B}\, x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x : A, (P\ x)}{\Gamma, t : A \vdash (P\ t)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P\ t}{\Gamma \vdash \exists x : A, P\ x} \qquad \frac{\Gamma, x : A, P\ x \vdash Q \qquad \Gamma \vdash \exists x : A, P\ x}{\Gamma \vdash Q}$$

4- Soit A une formule quelconque. Montrer que l'on peut échanger l'ordre des quantificateurs :

$$\forall x\ \forall y\ A \longleftrightarrow \forall y\ \forall x\ A \qquad \exists x\ \exists y\ A \longleftrightarrow \exists y\ \exists x\ A.$$

5- Montrer l'implication : $\exists y\ \forall x\ A \rightarrow \forall x\ \exists y\ A$. Pourquoi ne peut-on pas prouver l'implication réciproque ?

3 Induction sur les dérivations

On cherche à démontrer la propriété suivante (*lemme d'affaiblissement*) pour la logique propositionnelle :

$$\text{si } \Gamma \vdash A \text{ et } \Gamma \subset \Gamma' \text{ alors } \Gamma' \vdash A.$$

- Enoncer le principe d'induction sur la structure des dérivations en déduction naturelle.
- Démontrer la propriété en utilisant cette technique d'induction. On prendra soin de bien rédiger la démonstration, en mettant clairement en évidence l'hypothèse de récurrence utilisée.