Enveloppes convexes et cartes combinatoires en Coq

Christophe Brun Jean-François Dufourd Nicolas Magaud

LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Université Louis-Pasteur, Strasbourg

Les cartes combinatoires sont un outil particulièrement bien adapté à la modélisation de subdivisions de surfaces, notamment parce qu'elles permettent de séparer les aspects topologiques et les aspects géométriques. De plus cette structure de données uniforme permet de décrire aisément des programmes et de les prouver correct en utilisant l'induction structurelle. Nous présentons ici une étude de cas en géométrie algorithmique mettant en jeu une subdivision très simple : le calcul incrémental de l'enveloppe convexe dans le plan et sa certification avec le système d'aide à la preuve Coq.

Le calcul incrémental de l'enveloppe convexe 2D La première phase consiste à écrire un algorithme dans le langage fonctionnel de haut niveau de Coq [1]. Celui-ci est décrit par récursion structurelle sur les cartes et utilise les triplets d'orientation de Knuth [3]. Il peut alors être facilement extrait vers Ocaml puis interfacé avec du code existant. Le développement du programme dans l'environnement de preuves de Coq donne la possibilité de construire une démonstration formelle de l'adéquation de ce programme avec sa spécification, c'est-à-dire de certifier sa correction.

Certification du programme Nous nous intéressons principalement aux aspects algorithmiques du calcul de l'enveloppe convexe. L'axiomatisation des triplets de Knuth permet en effet d'isoler tous les calculs numériques et de supposer que ces calculs se font de manière exacte.

La première propriété, purement topologique, que l'on souhaite établir est la conservation des brins de la carte initiale dans la carte représentant l'enveloppe finale. Cela nécessite de classifier de manière très précise les brins selon qu'ils sont présents initialement, qu'ils sont intérieurs ou bien situés sur le polygone représentant l'enveloppe convexe. On veut aussi montrer que tous les points initiaux se trouvent à l'intérieur de ce polygone. Cela nécessite d'orienter le polygone, ce que l'on réalise facilement en ne cousant les brins les uns aux autres que dans un seul sens.

On notera que l'implantation en Coq est finalement assez proche d'une implantation concrète des cartes par des listes chaînées. Cela devrait permettre de dériver facile un programme impératif calculant l'enveloppe convexe comme cela a été fait pour la segmentation [2].

Travaux en cours et perspectives Les résultats obtenus jusqu'ici sur l'enveloppe convexe ainsi que les travaux de J.-F. Dufourd sur la segmentation par fusion de faces adjacentes de mêmes étiquettes montrent que les cartes combinatoires sont une structure de données bien adaptée à la description et à la preuve de correction de programmes typiques de la géométrie algorithmique. Nous allons étudier comment généraliser ces travaux de description et de démonstration formelle à d'autres algorithmes de calcul d'enveloppe convexe comme l'algorithme du paquet-cadeau de Jarvis ou l'algorithme de partage et fusion de Shamos. Par ailleurs, les cartes offrent un cadre homogène pour envisager la généralisation en 3 dimensions, voire même aux dimensions supérieures d'algorithmes de calcul d'enveloppes convexes. Finalement, ce travail ouvre la voie pour l'étude formelle d'algorithmes de calcul de subdivisions plus complexes, telle que la triangulation de Delaunay ou le diagramme de Voronoï.

Références

[1] Y. Bertot and P. Castéran. *Interactive theorem proving and program development - Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions.* Springer, 2004.

[2] J.-F. Dufourd. Design and Formal Proof of a New Optimal Image Segmentation Program with Hypermaps. *Pattern Recognition*, 2007.

[3] Donald Knuth. *Axioms and Hulls.* Number 606 in LNCS. Springer-Verlag, 1991.

[4] L. I. Meikle and J. D. Fleuriot. Mechanical Theorem Proving in Computational Geometry. In *Automated Deduction in Geometry 2004*, number 3763 in LNCS. Springer-Verlag, 2005.

[5] D. Pichardie and Y. Bertot. Formalizing Convex Hull Algorithms. In *Theorem Proving in Higher Order Logics (TPHOLs'01)*, number 2152 in LNCS, pages 346–361. Springer-Verlag, 2001.