



## Stage ou T.E.R. printemps/été 2017 :

### Le problème de l'aiguille de Buffon

Nicolas Magaud (magaud@unistra.fr)

#### Contexte

Le système Coq<sup>1</sup> est un assistant de preuves dédié à la fois aux mathématiques et à l'informatique [2]. Il permet notamment de décrire formellement des théories mathématiques et de construire des démonstrations de théorèmes s'appuyant sur ces théories. Il fonctionne de manière interactive. L'utilisateur construit *interactivement* ce qu'il croit être une preuve du théorème et le système vérifie *automatiquement* que la preuve construite démontre effectivement le théorème considéré.

#### Objectifs

On s'intéresse au problème de l'aiguille de Buffon [1]. Il s'agit d'un des 100 théorèmes référencés de la liste [4] qui peut être vu comme un *benchmark* pour valider la généricité d'un système de démonstration formelle comme Coq.

**Énoncé** Supposons que l'on laisse tomber une petite aiguille sur une feuille de papier réglée. Quelle est la probabilité que l'aiguille tombe dans une position telle qu'elle traverse l'une des droites ?

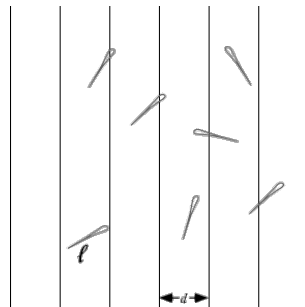


FIGURE 1 – Exemple de configuration (extrait de la bibliothèque en ligne MathWorld [3])

Dans un premier temps, on s'attachera à comprendre le résultat énoncé dans ce théorème et à le reproduire de manière expérimentale à l'aide des outils informatiques actuels.

**Théorème** Si une petite aiguille de longueur  $l$  est envoyée sur du papier réglé dont les droites sont régulièrement espacées d'une distance  $d \geq l$ , alors la probabilité que l'aiguille se place dans une position telle qu'elle coupe l'une des droites est exactement :

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$

---

1. <http://coq.inria.fr>

Dans un deuxième temps, on cherchera à identifier les briques de base nécessaires à la formalisation de l'énoncé en Coq ainsi que les résultats mathématiques nécessaires à la preuve de celui-ci (notamment les définitions et les propriétés liées aux probabilités).

## Références

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, Nicolas Puech, and Karl Heinrich Hofmann. *Raisonnements divins : quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, Paris, Berlin, Heidelberg, 2006. Trad. de la 3e éd. anglaise : Proofs from the book.
- [2] Yves Bertot and Pierre Castéran. *Interactive Theorem Proving and Program Development, Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions*. Springer, 2004.
- [3] Wolfram MathWorld. Buffon's needle problem. available at <http://math-world.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html>.
- [4] Freek Wiedijk. Formalizing 100 theorems. <http://www.cs.ru.nl/~freek/100/>.