

Traitement du Signal

Durée : 3 heures

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents et calculettes autorisés

Ordinateurs et téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Filtre numérique (9 points)

On considère des signaux échantillonnés de la forme $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, etc., pour un temps $t \in \mathbb{Z}$. On a un filtre numérique transformant un signal d'entrée $x(t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) en un signal de sortie $y(t)$ donné par

$$y(t) = x(t - 3) + x(t - 5) + x(t - 7) + x(t - 9) + x(t - 11) .$$

- (i) Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre ?
- (ii) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?
- (iii) Quel est le premier instant $s \in \mathbb{Z}$ où on peut obtenir la valeur $y(t)$?
- (iv) Ce filtre est-il causal ? Si oui, y a-t-il un temps mort ?
- (v) Si pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $|x(t)| \leq M$, que peut-on dire de $|y(t)|$ pour $t \in \mathbb{Z}$?
- (vi) Donner une équation récursive satisfaite par $y(t)$, liant $y(t)$ et $y(t - 2)$.
- (vii) Soit $z(t)$ la solution générale de l'équation récursive de (vi). Décrire comment $z(t)$ peut être obtenue à partir de la solution particulière $y(t)$.
- (viii) Dessiner le diagramme des circuits correspondant aux équations en (i) et en (vi).

(2) Échantillonnage (3 points)

Un signal analogique S peut être échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de 50kHz, ce qui donne le signal échantillonné S_{50} , ou bien avec une fréquence d'échantillonnage de 100kHz, ce qui donne le signal échantillonné S_{100} . L'un des deux signaux S_{50} et S_{100} peut se déduire de l'autre. Lequel ? Comment ?

(3) Modulation (5 points)

L'oreille humaine entend les fréquences jusqu'à 20kHz. On a un signal sonore contenant des fréquences (positives) jusqu'à 40kHz. On le module en amplitude en le multipliant par une porteuse cosinusoidale de fréquence $f_m > 0$. Quelle est la valeur minimum de f_m pour que l'on puisse, à partir du signal modulé, reconstruire :

- (i) le signal original ;
- (ii) la partie audible du signal original.

Dans les deux cas, expliquer comment on peut reconstruire le signal ou cette partie, en utilisant des filtres passe-bas ou passe-haut, la modulation en amplitude, et un amplificateur, en précisant bien les fréquences de coupure et de modulation.

(4) Fonction périodique bidimensionnelle (6 points)

On considère le plan \mathbb{R}^2 avec les axes de coordonnées cartésiennes x et y . Soient deux axes orthogonaux x' et y' formant un angle θ avec les axes x et y . On a une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, constante dans la direction de l'axe y' , et variant de façon périodique selon l'axe x' , avec une période P . Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction périodique de période P donnant les valeurs de f selon l'axe x' ; donc en un point (x_0, y_0) ayant les coordonnées (x'_0, y'_0) suivant les axes x', y' , on aura $f(x_0, y_0) = g(x'_0)$.

- (i) Exprimer $f(x, y)$ sous forme $g(\dots)$, où \dots est fonction de x, y et θ .
- (ii) Donner la forme générale que prendra la série de Fourier (en cosinus et sinus) de f .

