Université Louis Pasteur
UFR de Mathématique et Informatique

Semestre de printemps 2004
IUP GMI 1ère année

Traitement du Signal

Contrôle continu

Durée : 2 heures
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones portables interdits

Justifiez soigneusement vos réponses!

(1) Analyse de Fourier

Donner la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(2x) & \text{pour } -\pi < x < +\pi; \\ 0 & \text{pour } |x| \geq \pi. \end{cases}$$

(2) Série de Fourier

La fonction périodique f à variable réelle est donnée par

$$s(x) = \sin(2x) + \cos(3x) \quad .$$

(i) Déterminer la période de f.

(ii) Donner la série de Fourier en cosinus et sinus de f.

(3) Modulation et filtrage

On dispose des appareillages suivants :

(a) *un modulateur d'amplitude cosinusoidal :* celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par la fonction cosinusoide $\cos[2\pi f_m t]$, dont la fréquence f_m de modulation est réglable par l'utilisateur ;

(b) *un filtre passe bas :* celui-ci enlève d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue est supérieure à une fréquence de coupure f_c, cette fréquence étant réglable par l'utilisateur ;

(c) *un filtre passe haut :* celui-ci enlève d'un signal toutes les fréquences dont la valeur absolue est inférieure à une fréquence de coupure f_c, cette fréquence étant réglable par l'utilisateur ;

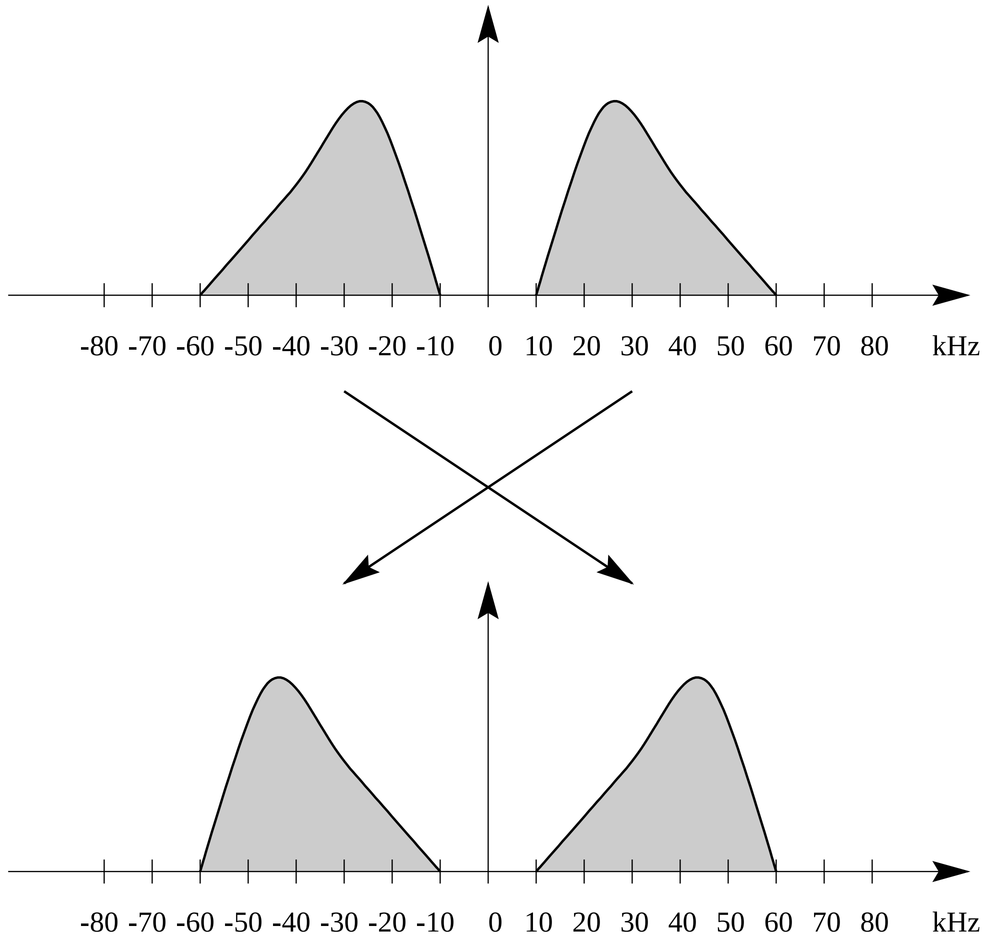
(d) *un amplificateur:* celui-ci multiplie un signal $S(t)$ par une constante A réglable par l'utilisateur.

On a un signal S dont les fréquences positives s'échelonnent de 10k Hz à 60k Hz (donc le spectre de fréquences couvre les bandes $[-60, -10]$ et $[10, 60]$ sur un échelle en k Hz). Expliquer comment on peut utiliser les appareillages (a, b, c, d) (tous ou une partie) pour intervertir les intervalles $[-60, -10]$ et $[10, 60]$ du spectre de fréquences, c.à.d.

— en décalant les fréquences positives de -70k Hz,

— et en décalant en même temps les fréquences négatives de $+70$k Hz.

(Voir la figure au verso.)



(4) Déphasage

On a deux signaux cosinusoïdaux S_1 et S_2 de même fréquence ν, de même amplitude 1, et de phases respectives φ_1 et φ_2:

$$S_1(t) = \cos\bigl(2\pi\,\nu t + \varphi_1\bigr) \qquad \text{et} \qquad S_2(t) = \cos\bigl(2\pi\,\nu t + \varphi_2\bigr) \ .$$

On suppose que $\varphi_2 - \varphi_1$ n'est pas multiple de π.

(i) Montrer comment on peut, par combinaison de S_1 et S_2 obtenir le signal S_3 donné par

$$S_3(t) = \sin\bigl(2\pi\,\nu t + \varphi_1\bigr) \ .$$

(ii) Montrer ensuite comment obtenir, pour un angle θ quelconque, le signal S_θ donné par

$$S_\theta(t) = \cos\bigl(2\pi\,\nu t + \varphi_1 + \theta\bigr) \ .$$

(Rappel : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.)