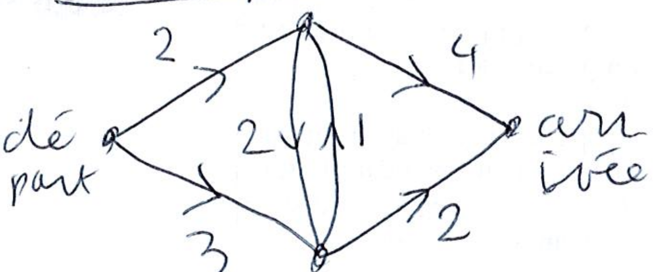
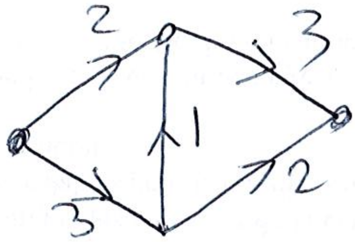
Flots Maximaux

Problème posé pendant la 2e G.M.
On veut acheminer du matériel et des soldats d'un lieu à un autre. Chaque tronçon de route a une certaine capacité de passage (nombre de camions par minute, p. ex.). Comment répartir les camions entre les différents chemins pour acheminer le maximum?

Exemple



capacités



flot maximal

Autre exemple. Transmission de données entre deux sites à travers le réseau informatique. Chaque liaison entre deux noeuds a une certaine capacité maximum (~~octets~~ nombre d'octets par seconde). Comment transmettre le plus rapidement les données?

Un réseau de transport est un graphe orienté simple (S, A), où on distingue deux sommets distincts, la source s et le puits p, muni d'une fonction de capacité $c : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

Pour deux sommets distincts $u, v \in S$, $c(u,v) \geq 0$ est la capacité de l'arête (u,v). C'est la quantité maximum pour un flot allant de u à v.

<u>NB</u>. On ne considère pas les boucles (u,u), on peut poser $c(u,u) = \infty$.

On suppose le graphe sans boucles.

Un flot (ou un débit) est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ représentant le flot effectif le long de l'arête.

On suppose initialement f à valeurs ≥ 0, mais pour des raisons pratiques, on relaxera cette contrainte.

On a ~~3~~ 2 contraintes:

- capacité: pour $(u,v) \in A$, $f(u,v) \leq c(u,v)$ (le flot ne peut pas dépasser la capacité)

- équilibre (conservation de flot): pour

$v \in S$, $v \neq s, p$, $\displaystyle\sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u,v) = \sum_{u \in \Gamma^+(v)} f(v,u)$

flot entrant en v = flot sortant en v.

Cela correspond à la loi de Kirchhoff pour les circuits électriques.

Simplifications.

1) Pour $u, v \in S$, $u \neq v$, tel que $(u,v) \notin A$, on pose $c(u,v) = 0$:

On rajoute les arêtes non-boucle qui n'appartiennent pas au graphe, avec une capacité 0.

2) Supposons que pour $u, v \in S$, $u \neq v$, on ait $f(u,v) > 0$ et $f(v,u) > 0$, avec $f(u,v) \geq f(v,u)$.

On a un flot et un flot retour !

On va supprimer le flot $f(v,u)$ et réduire $f(u,v)$ à $f(u,v) - f(v,u)$

exemple 

Cette modification $\begin{cases} f'(u,v) := f(u,v) - f(v,u) \\ f'(v,u) := 0 \end{cases}$

préserve les 2 contraintes

$$f'(u,v) \leq f(u,v) \leq c(u,v)$$

$$f'(v,u) \leq 0 \leq c(v,u)$$

$$\sum_{w\in\Gamma^+(u)} f'(u,w) = \left(\sum_{w\in\Gamma^+(u)} f(u,w)\right) - f(v,u)$$

$$\sum_{w\in\Gamma^-(u)} f'(w,u) = \left(\sum_{w\in\Gamma^-(u)} f'(w,u)\right) - f(v,u)$$

et de même pour $\sum_{w\in\Gamma^+(v)} f'(v,w)$ et $\sum_{w\in\Gamma^-(v)} f'(w,v)$

Donc entre 2 sommets distincts u et v, le flux ne va que dans un sens : de u vers v ou de v vers u, ou aucun flux, mais pas les deux à la fois

$u \xrightarrow{x>0} v$ ou $u \xleftarrow{y>0} v$, pas $u \underset{y>0}{\overset{x>0}{\rightleftarrows}} v$

ou $u \leftarrow 0 \rightarrow v$

Pour u, v tels que $f(u,v) \geq 0$, on va poser $f(v,u) = -f(u,v)$.

Un flot positif de u vers v peut être considéré comme un flux négatif de v vers u.

La contrainte de capacité reste préservée $f(v,u) \leq 0 \leq c(v,u)$.

La règle de l'équilibre devient

$\forall u \in S \setminus \{s,p\}$,

$$\sum_{v \in S \setminus \{u\}} f(u,v) = 0$$

les termes ~~négatifs~~ positifs correspondent au flux sortant en v, les ~~positifs~~ négatifs au flux entrant.

Valeur du flot :

$$|f| = \sum_{v \in S \setminus \{s\}} f(s,v)$$

flux sortant de la source.

Le flux entrant dans le puits est aussi égal à la valeur de $|f|$

$$\sum_{v \in S \setminus \{p\}} f(v,p) = |f|$$

En effet $\displaystyle\sum_{u \in S} \sum_{\substack{v \in S \\ v \neq u}} f(u,v) = 0$ par antisymétrie $f(u,v) = -f(v,u)$

Mais $\displaystyle\sum_{u \in S} \sum_{v \in S \setminus \{u\}} f(u,v) = \sum_{v \in S \setminus \{p\}} f(p,v) + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} f(s,v) +$

$$+ \sum_{u \in V \setminus \{s,p\}} \underbrace{\sum_{v \in V - p} f(u,v)}_{} = 0$$ par conservation de flot (équilibre)

Donc $0 = \sum_{v \in S-p} f(p,v) + \sum_{v \in S-s} f(s,v) + 0$

$f(p,v) = -f(v,p)$

D'où $\sum_{v \in S-p} f(v,p) = \sum_{v \in S-s} f(s,v) = |f|$

Problème : trouver un flot f, satisfaisant les contraintes de capacité et d'équilibre, tel que $|f|$ soit le plus grand possible.
Flot maximal.

Idée Capacité résiduelle

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) \geq 0$$

Si f est un flot pour la capacité c, et g est un flot pour la capacité résiduelle c_f, alors $f+g$ est un flot pour la capacité c, avec $|f+g| = |f| + |g|$.

Chemin augmentant

Soit $C = a_1, \dots, a_m$ un chemin de s à p tel que $\min_{i=1}^{m} c_f(a_i) = c_f(C) > 0$

Alors la fonction f_C définie par

$$f_C(u,v) = \begin{cases} c_f(C) & \text{si } (u,v) \in C, \\ -c_f(C) & \text{si } (v,u) \in C, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

est un flot pour c_f avec $|f_C| = c_f(C) > 0$.

Donc on prend le flot $f + f_C$ pour c, avec $|f + f_C| > |f|$

Méthode de Ford-Fulkerson

Initialisation : $f := 0$

Tant qu'il existe un chemin augmentant C

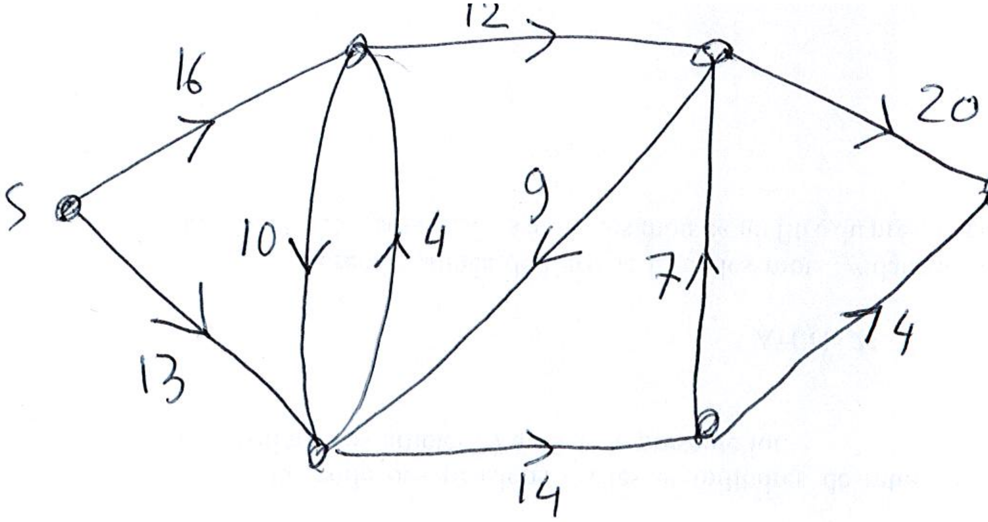
Ajouter f_C à f

A la fin : f est un flot maximal

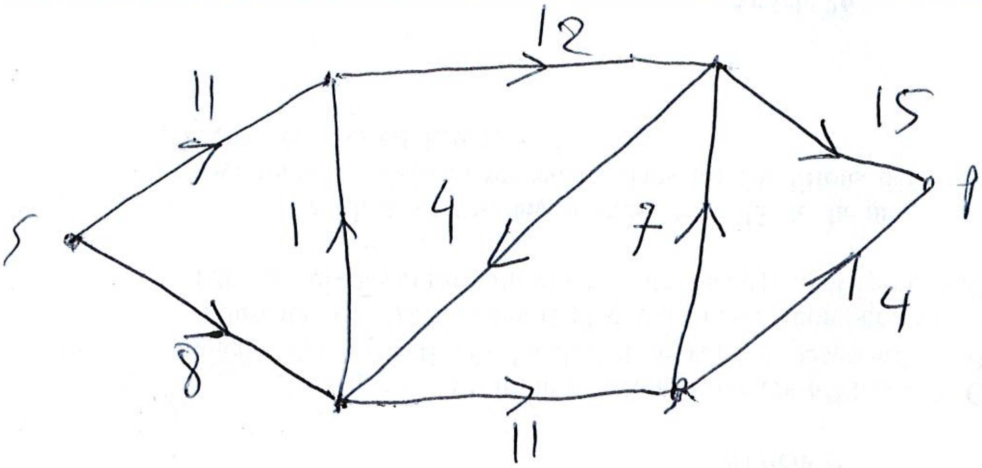
Si toutes les capacités sont multiples d'un même nombre :

$\exists r > 0, \forall (u,v) \in S^2 \quad c(u,v)/r \in \mathbb{N}$

Alors la méthode converge vers un flot maximal en un nombre fini d'étapes.

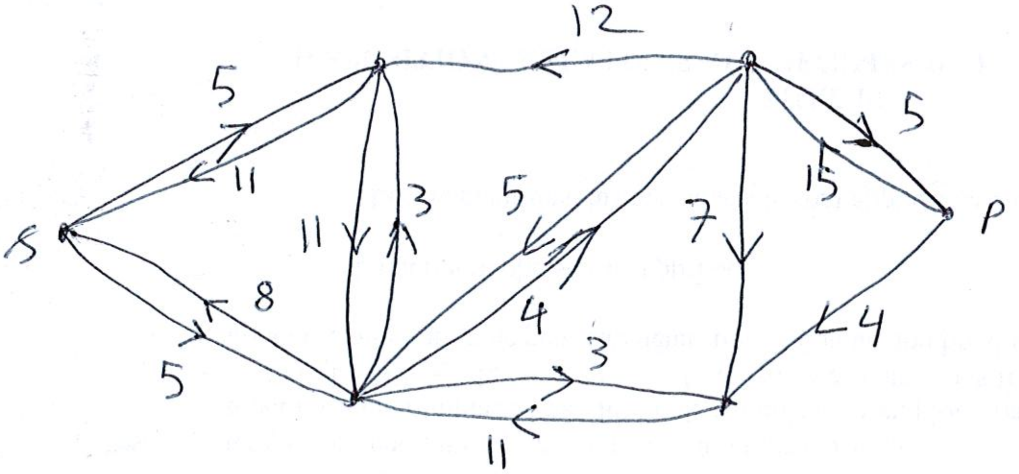


Capacité : valeur nulle sur les arcs non dessinés

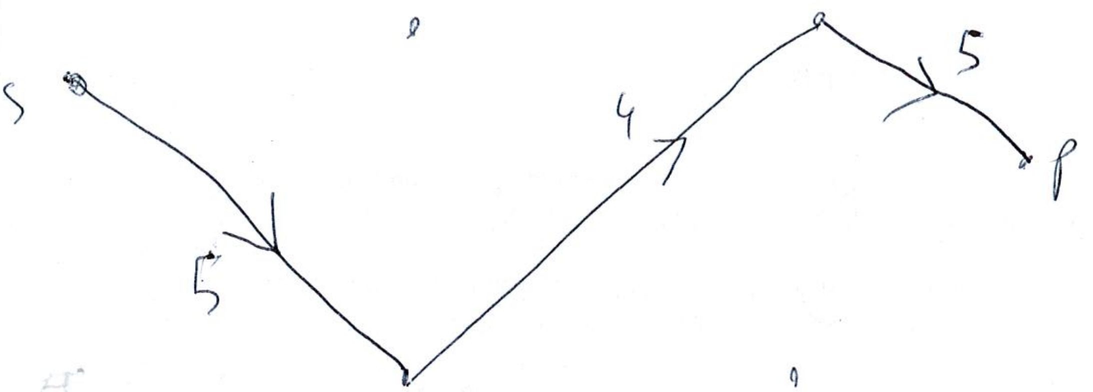


flot : valeurs opposées sur les arcs inverses, nulles ailleurs.

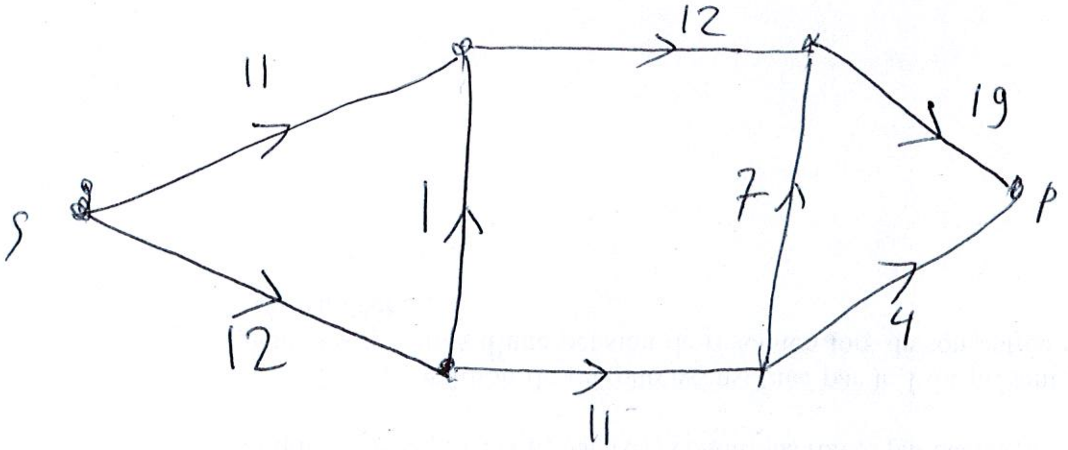
$|f| = 19$



capacité résiduelle : valeur nulle sur les arcs non dessinés



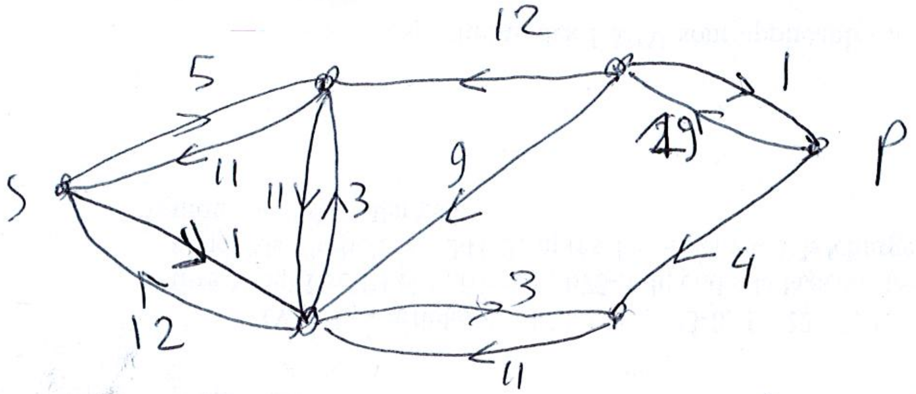
chemin augmentant $|f_0| = 4$



Ajout du chemin augmentant : nouveau flot

$|f| = 23$

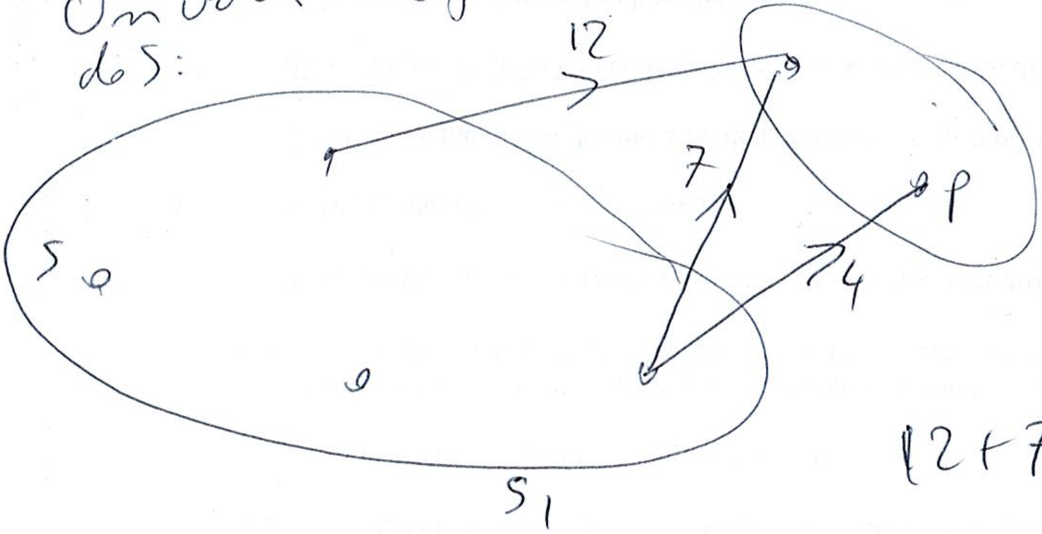
Nouvelle capacité résiduelle



Il n'y a pas de chemin augmentant.

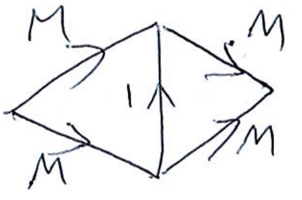
Donc $|f| = 23$ donne bien le flot maximal

On voit en faisant la coupure suivante de S :



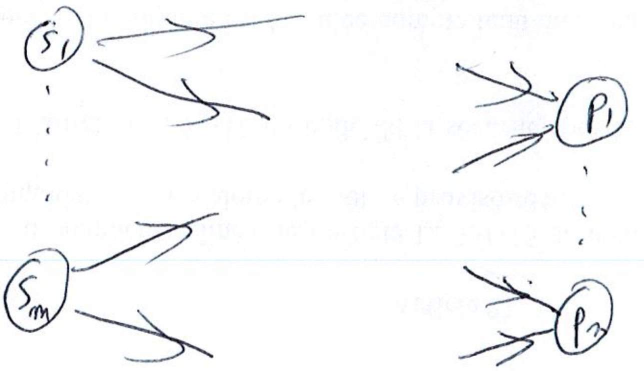
le flot S_2 entre S_1 et S_2 égale la capacité $12+7+4 = 23$.

Le nombre d'étapes peut être égal à la taille du flot maximal.

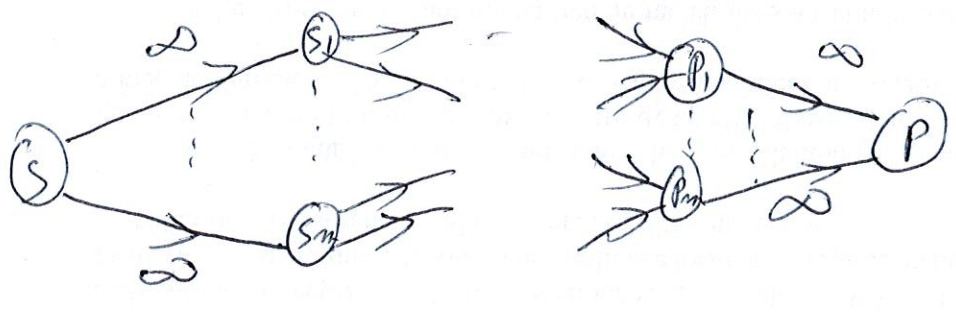


chemins augmentants

Généralisation : Plusieurs sources ou plusieurs puits.



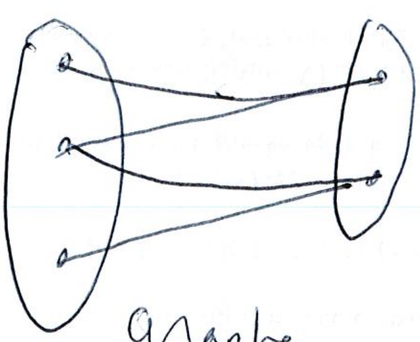
Cela se ramène au cas habituel : on rajoute une "super-source" $\bar{s}$ et un "super-puits" $\bar{p}$, on met des arêtes $\bar{s} \to s_i$ et $p_j \to \bar{p}$ de capacité infinie



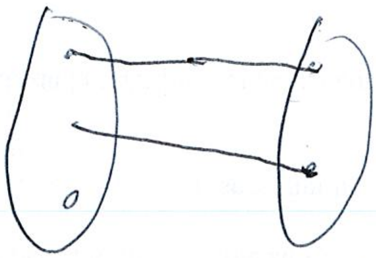
Application : appariement maximal dans un graphe biparti.

$S = S_1 \dot\cup S_2$, toute arête a une extrémité en S_1 et l'autre en S_2.

Un appariement est un ensemble d'arêtes ayant toutes des extrémités distinctes. Elles réalisent une correspondance 1 à 1 entre une partie de S_1 et une de S_2

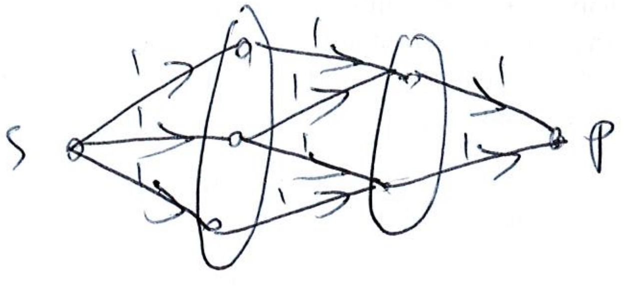


graphe



appariement maximal.

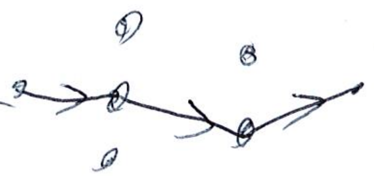
Solution : orienter les arêtes en arcs d'origine en S_1 et but en S_2, ajouter une source s et un puits p, joindre un arc de s à chaque sommet de S_1, et de chaque sommet de S_2 à p. Mettre une capacité 1 sur tous les arcs



Arcs augmentants donnant la solution

1er

2ème



final