Chemin, chaîne, circuit, cycle :

Soit G un graphe orienté.

Un **chemin** est une suite $a_1, \dots, a_n \in A$ telle que pour $i = 1, \dots, n-1$, $\beta(a_i) = \alpha(a_{i+1})$

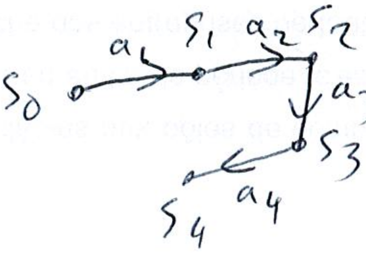
n est la **longueur** du chemin

$\alpha(a_1)$ est la $\left\{ \begin{array}{l} \text{queue / origine /} \\ \text{extrémité initiale} \end{array} \right\}$ du chemin

$\beta(a_n)$ est la $\left\{ \begin{array}{l} \text{tête / but /} \\ \text{extrémité finale} \end{array} \right\}$ du chemin

On peut représenter le chemin comme la suite $s_0\, a_1\, s_1 \dots s_{n-1}\, a_n\, s_n$ où pour $i = 1, \dots, n$, $s_{i-1} = \alpha(a_i)$ et $s_i = \beta(a_i)$

chemin de longueur 4



Un chemin de longueur n a n arcs et $n+1$ sommets

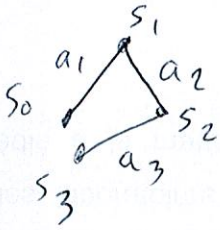
chemin de longueur 0 : $\cdot\, s_0$

Soit G un graphe non orienté. Une **chaîne** est une suite $s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n$, avec $a_1, \dots, a_n \in A$ et $s_0, \dots, s_n \in S$, telle que pour $i = 1, \dots, n$, $\delta(a_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$.

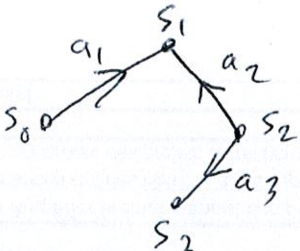
n est la **longueur** de la chaîne

s_0 et s_n sont les <u>extrémités</u> de la chaîne.

chaîne de longueur 3



Dans un graphe orienté G, une <u>chaîne</u> est une chaîne de $\gamma(G)$.



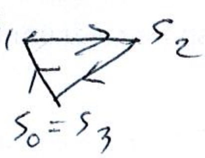
Un chemin (une chaîne) $s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n$ est

ouvert(e) si $s_0 \neq s_n$

fermé(e) si $s_0 = s_n$

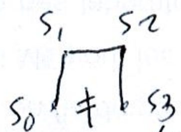
chemin

ouvert

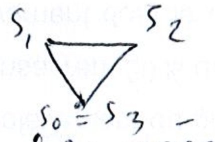


de longueur 3

chaîne



ouverte



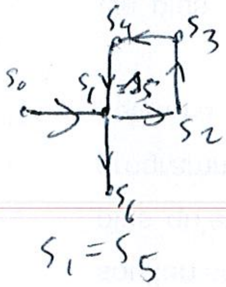
fermée

Un chemin (une chaîne) est <u>simple</u> si tous les arcs (toutes les arêtes) sont mutuellement dis~~joi~~tinct(e)s.

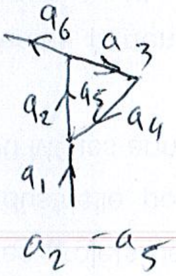
Pour $1 \leq i < j \leq n$, $a_i \neq a_j$

Il (elle) est <u>élémentaire</u> si tous les sommets sont mutuellement distinct(e)s sauf éventuellement les deux extrémités.

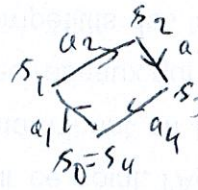
Pour $0 \le i < j \le n$, $s_i \ne s_j$ ou $\begin{cases} i=0 \\ \text{et} \\ j=n \end{cases}$



simple mais pas élémentaire



pas simple



élémentaire et simple

Prop Tout chemin élémentaire est simple.

Preuve Pour passer 2x par le même arc, il faut passer 2x par la tête et la queue de celui-ci

$$s_{i-1} \xrightarrow{a_i} s_i \qquad s_{j-1} \xrightarrow{a_j} s_j \qquad a_i = a_j \Rightarrow \begin{cases} s_{i-1} = s_{j-1} \\ s_i = s_j \end{cases}$$

On appelle

- un circuit un chemin fermé simple
- un pseudo-circuit un chemin fermé non-simple
- un cycle une chaîne fermée simple
- un pseudo-cycle une chaîne fermée non-simple.

NB. Dans un graphe non orienté simple,

une chaîne fermée de longueur 2 est un pseudo-cycle $s_0\, a_1\, s_1\, a_1\, s_2 = s_0$.

Prop. Toute chaîne élémentaire est soit simple, soit un pseudo-cycle de longueur 2.

Preuve. Supposons que $a_i = a_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$

Donc $\{s_{i-1}, s_i\} = \delta(a_i) = \delta(a_j) = \{s_{j-1}, s_j\}$

Comme le chemin est élémentaire et

$0 \leq i-1 < j-1 < n$: $s_{i-1} \neq s_{j-1}$,

$0 < i < j \leq n$: $s_i \neq s_j$.

Donc $s_{i-1} = s_j$ et $s_i = s_{j-1}$.

Comme le chemin est élémentaire et

$0 \leq i-1 < j \leq n$, on a $i-1 = 0$ et $j = n$;

$0 < i \leq j-1 < n$, on a $i = j-1$.

Par conséquent $i = 1$, $j = 2$ et $n = 2$.

$s_0\, a_1\, s_1\, a_2\, s_2$ avec $s_0 = s_2$ et $a_1 = a_2$ $\boxtimes$

Concaténation de chemins ou chaînes

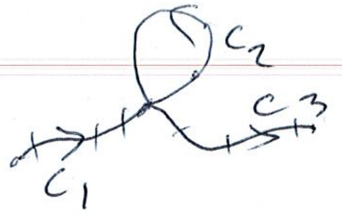
$C_1 = s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n$

C_2 $s'_0, a'_1, s'_1, \dots, s'_{m-1}, a'_m, s'_m$ avec $s_n = s'_0$

Concaténation :

$C_1C_2 = s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n = s'_0, a'_1, s'_1, \dots, s'_{m-1}, a'_m, s'_m$

<u>Prop.</u> Si C est un chemin / une chaîne non élémentaire, alors $C = C_1 C_2 C_3$, où C_2 est fermé et élémentaire, C_1 et C_3 se concatènent, et $C_1 C_3$ a les mêmes extrémités que C



<u>Preuve</u> $C = s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n$.

Soit $h = \min\{i = 0, \dots, n \mid \exists j > i,\ s_j = s_i\}$

s_h est le premier sommet répété

et soit $k = \min\{i = h+1, \dots, n \mid s_i = s_h\}$

s_k est la première répétition de s_h

$C_1 = s_0, \dots, s_h$

$C_2 = s_h, \dots, s_k$ ← élémentaire

$C_3 = s_k, \dots, s_n$

$s_h = s_k$ se concatènent

$C_1 C_3 = s_0, \dots, s_h = s_k, \dots, s_n$ mêmes extrémités que C. ∎

On dit que C se décompose en $C_1 C_3$ et C_2

Par récurrence, on obtient :

Corol. (1) un chemin / une chaîne de p à q se décompose en un chemin / une chaîne élémentaire de p à q et des chemins / chaînes fermé(e)s élémentaires

(2) Tout chemin fermé se décompose en circuits élémentaires

(3) Toute chaîne fermée se décompose en cycles élémentaires et/ou pseudo-cycles de longueur 2

(4) Tout cycle se décompose en cycles élémentaires

(5) Dans une chaîne fermée, toute arête apparaissant un nombre impair de fois, apparait dans un cycle élémentaire

(6) Toute chaîne fermée de longueur impaire contient un cycle élémentaire.

Preuve (1) Induction

(2) cas particulier de (1), en utilisant le fait

qu'un chemin élémentaire est simple, donc un chemin fermé élémentaire est un circuit.

(3) Cas particulier de (1), en utilisant le fait que toute chaîne élémentaire est simple ou un pseudo-cycle de longueur 2, donc toute chaîne fermée élémentaire est un cycle ou un pseudo-cycle de longueur 2.

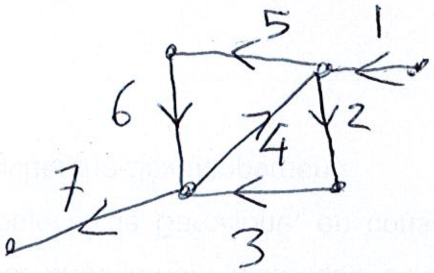
(4) Cas particulier de (3) : un cycle n'a pas de répétition d'arête, donc pas de pseudo-cycle de longueur 2

(5) Appliquer (3). Dans un pseudo-cycle de longueur 2, l'arête apparaît 2 fois. En enlevant tous les pseudo-cycles de longueur 2, il reste un cycle élémentaire où l'arête apparaît un nombre impair de fois, donc au moins une fois

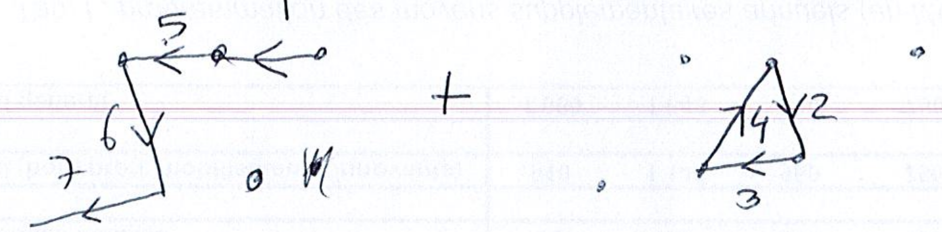
(6) Appliquer (5) : au moins une arête apparaît un nombre impair de fois.

III

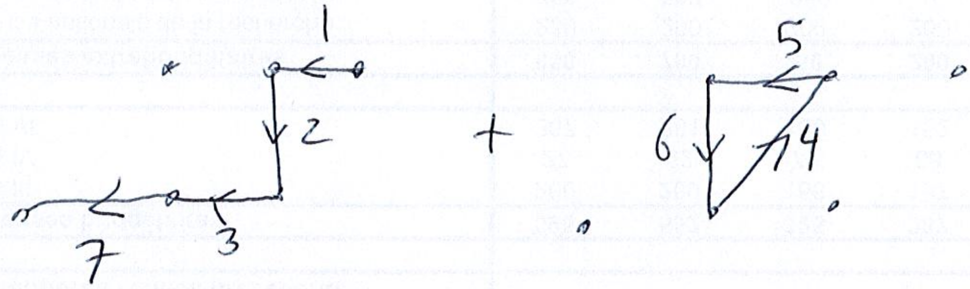
En (1) la décomposition n'est pas unique, idem autres.



a 2 décompositions



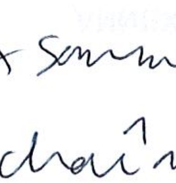
ou



<u>Rappel</u>. relation d'équivalence, classes d'équivalence, partition cf. p 1 du support n° 7 de Combinatoire L3.

<u>Connexité</u> Un graphe non orienté est <u>connexe</u> si deux sommets quelconques sont extrémités d'une chaîne.

Connexe.



Pas connexe

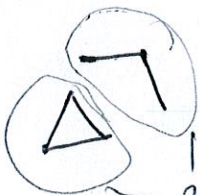
Un graphe orienté G est connexe ssi $\gamma(G)$ est connexe

 connexe

 pas connexe

Si G n'est pas connexe, la relation binaire sur S liant s et s' s'il existe une chaîne d'extrémités s et s', est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les composantes connexes du graphe, elles forment une partition de S. Pour $p \in S$, la composante connexe de G contenant p est l'ensemble des $s \in S$ reliés à p par une chaîne.

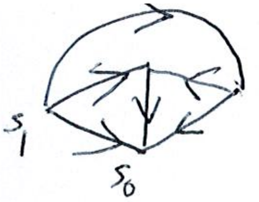


2 composantes connexes

Les sous-graphes connexes maximaux de G sont ceux engendrés par les composantes connexes

<u>Connexité forte</u> Un graphe <u>orienté</u> est <u>fortement connexe</u> si deux sommets quelconques sont tête et queue d'un chemin

fortement connexe



connexe mais pas fortement

pas de chemin de s_0 à s_1

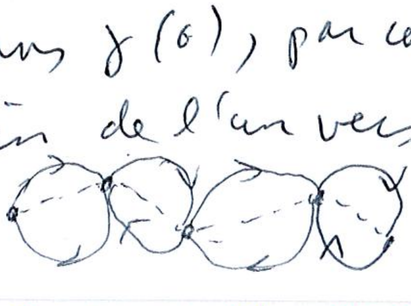
Si G n'est pas fortement connexe, la relation binaire sur S liant s et s' s'il existe un chemin de s à s' et un chemin de s' à s, est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes de G.

<u>Proposition</u>. Soit G un graphe orienté connexe. G est fortement connexe ssi toute ~~arête~~ arc fait partie d'un circuit.

<u>Preuve</u>. Si s et s' sont les extrémités d'une arête de $\gamma(G)$, alors s et s' sont sur un circuit de G, donc il existe un chemin de s à s' et un autre de s' à s.

Comme deux sommets de G sont reliés par un chaîne dans $\gamma(G)$, par concaténation il y a un chemin de l'un vers l'autre et vice-versa



Circuits / cycles dans des graphes particuliers

Prop. ~~(t)~~ Un graphe non orienté :

(1) est biparti

ssi (2) toutes ses chaînes fermées sont de longueur paire

ssi (3) tous ses cycles sont de longueur paire

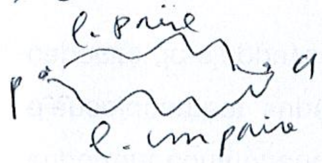
Preuve (2) ⇒ (3) car un cycle est une chaîne fermée

(3) ⇒ (2) car un chemin fermé se décompose en cycles élémentaires et en pseudo-cycles de longueur 2 ; donc sa longueur sera la somme de longueurs paires.

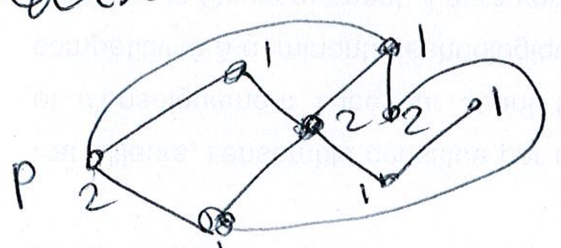
(1) ⇒ (2) En suivant le chemin, on alterne entre les deux côtés S_1 et S_2, pour revenir au point de départ, il faut un nombre pair d'alternances.

(2) ⇒ (1) Dans chaque composante connexe C, on choisit un sommet p. Pour tout $q \in C$, il ne peut y avoir à la fois une chaîne de longueur paire et une autre de longueur impaire, d'extrémités p et q

(sinon la concaténation de la 1e et de l'inverse de la 2e serait une chaîne fermée de longueur impaire)



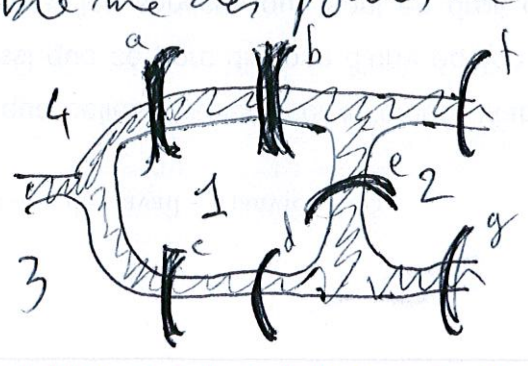
On met dans S_1 les q reliés à p par une chaîne de longueur impaire, dans S_2 ceux reliés à p par une chaîne de longueur paire

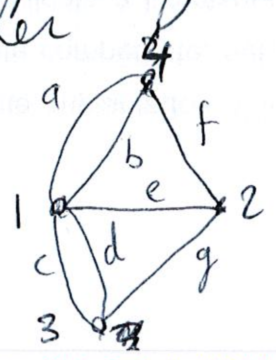


Un chemin / une chaîne est eulérien(ne) s'il passe exactement une fois par chaque arc / arête.

Il / elle est nécessairement simple.

Problème des ponts de Königsberg (Kaliningrad) par Euler 1766





Thm (1) Un graphe orienté a un circuit eulérien ssi il a au plus une composante connexe non réduite à un point isolé, et $\forall s \in S$, $d^+(s) = d^-(s)$

(2) Un graphe non orienté a un cycle eulérien ssi il a au plus une composante connexe non réduite à un point isolé, et $\forall s \in S$, $d(s)$ est pair.

Preuve pour le cas orienté. (Semblable pour le cas non orienté)

Condition nécessaire : le circuit eulérien visite tous les sommets non isolés, donc ils sont tous dans la même composante connexe.

Chaque fois qu'un arc du ~~cycle~~ circuit entre en s, le suivant sort de s, et vice-versa. Donc autant d'arcs entrants et sortants en s : $d^+(s) = d^+(s)$

Condition suffisante : Par récurrence sur le nombre d'~~arêtes~~ arcs

0 ~~arêtes~~ arcs : OK circuit réduit à 1 sommet.

Supposons $n > 0$ arêtes

On montre d'abord que le graphe a un circuit élémentaire. Supposons fans

On choisit $p_0 \in S$ non isolé. On construit un chemin $p_0, a_1, p_1, \ldots, p_{k-1}, a_k, p_k$ élémentaire par récurrence sur k.

$k \to k+1$. Comme $p_k \neq p_j$ $(j<k)$, a_k est le seul arc du chemin passant par p_k, comme a_k entre en p_k, il existe un arc sortant de p_k $(d^-(p_k) = d^+(p_k) > 0)$, on en choisit un, a_{k+1}, de tête p_{k+1}.

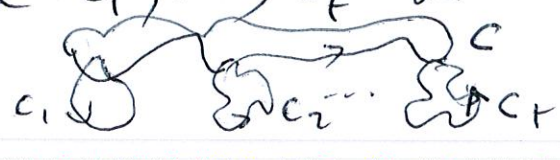
Comme S fini, on a $p_j = p_k$ pour $j < k$, donc on a un ~~cycle~~ circuit élémentaire C dans ce chemin.

En enlevant les arêtes de C, on diminue $d^+(s)$ et $d^-(s)$ de 1 pour chaque sommet de C. Donc le graphe restant satisfait encore les conditions $d^+(s) = d^-(s)$ $\forall s \in S$.

Soient $S_1, \ldots, S_t$ les composantes connexes non réduites à un point isolé.

Par hypothèse de récurrence, comme elles ont moins que n arêtes, chacune a un circuit eulérien : $C_1, \ldots, C_t$

Comme G est connexe, C doit traverser chacun de $C_1, \ldots, C_t$. La concaténation de C avec $C_1, \ldots, C_t$ donne le circuit eulérien



Corollaire (1) Un graphe orienté a un chemin eulérien de p à q ($p, q \in S$, $p \neq q$) ssi il a au plus une composante connexe non réduite à un point isolé, $d^+(p) = d^-(p) + 1$, $d^+(q) = d^-(q) - 1$, et $\forall s \in S \setminus \{p, q\}$, $d^+(s) = d^-(s)$

(2) Un graphe non orienté a une chaîne eulérienne de p à q ssi il a au plus une composante connexe non réduite à un point isolé, $d(p)$ et $d(q)$ sont impairs, et $\forall s \in S \setminus \{p, q\}$, $d(s)$ est pair

Preuve (cas orienté)

Il y a un chemin orienté de p à q ssi en rajoutant un arc $p \longleftarrow q$ on a un circuit eulérien.

Le rajout de cet arc incrémente $d^+(q)$ et $d^-(p)$ de 1 : $\begin{cases} d^+(q) + 1 = d^-(q) \\ d^+(p) = d^-(p) + 1 \end{cases}$