Automatisation de la géométrie en Coq

Julien Narboux[1]
sous la direction de
Hugo Herbelin[1]

[1]INRIA FUTURS
LIX

INRIA-Sophia, Décembre 2003

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Motivations

- La géométrie est l'un des rares domaines ou la démonstration automatique a été vraiment fructueuse.
- Coq permet d'insérer des preuves géométriques dans des preuves plus complexes.
- Pédagogie, CAD, vision

Motivations

- La géométrie est l'un des rares domaines ou la démonstration automatique a été vraiment fructueuse.
- Coq permet d'insérer des preuves géométriques dans des preuves plus complexes.
- Pédagogie, CAD, vision

Motivations

- La géométrie est l'un des rares domaines ou la démonstration automatique a été vraiment fructueuse.
- Coq permet d'insérer des preuves géométriques dans des preuves plus complexes.
- Pédagogie, CAD, vision

Les méthodes de démonstration automatique en géométrie

- La méthode de Tarski.
- La méthode de Wu.
- La méthode de Chou, Gao et Zhang.
  "Machine Proofs in Geometry - Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems".

Les méthodes de démonstration automatique en géométrie

- La méthode de Tarski.
- La méthode de Wu.
- La méthode de Chou, Gao et Zhang.

Les méthodes de démonstration automatique en géométrie

- La méthode de Tarski.
- La méthode de Wu.
- La méthode de Chou, Gao et Zhang.
  "Machine Proofs in Geometry - Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems".

Les méthodes de démonstration automatique en géométrie

- La méthode de Tarski.
- La méthode de Wu.
- La méthode de Chou, Gao et Zhang.
  "Machine Proofs in Geometry - Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems".

La méthode choisie : Chou-Gao-Zhang

Parce qu'elle est :

- Lisible
- Relativement simple
- Efficace

La méthode choisie : Chou-Gao-Zhang

Parce qu'elle est :

- Lisible
- Relativement simple
- Efficace

La méthode choisie : Chou-Gao-Zhang

Parce qu'elle est :

- Lisible
- Relativement simple
- Efficace

L'axiomatique de Chou

Un corps

de caractéristique différente de deux

Une distance orientée

- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- $\overline{AB} = 0 \longleftrightarrow A = B$

L'axiomatique de Chou

Un corps

de caractéristique différente de deux

Une distance orientée

- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- $\overline{AB} = 0 \iff A = B$

Une aire orientée

- $S_{ABC} = S_{CAB}$
- $S_{ABC} = -S_{BAC}$

Chasles

$(Col\ ABC) \rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Une aire orientée

- $S_{ABC} = S_{CAB}$
- $S_{ABC} = -S_{BAC}$

Chasles

$(Col\ ABC) \rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Axiomes de dimension

- $\exists A, B, C | S_{ABC} \neq 0$
- $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} + S_{DBC}$

Axiomes de construction

- $(\forall A, B : Point, r : F), \exists P : Point | (Col\ ABP) \wedge \overline{AP} = r\overline{AB}$
- $\forall A, B, P, P' : Point, r : F\ A \neq B \rightarrow (Col\ ABP) \rightarrow \overline{AP} = r\overline{AB} \rightarrow (Col\ ABP') \rightarrow \overline{AP'} = r\overline{AB} \rightarrow P = P'$

Axiome des proportions

$$A \neq C \rightarrow \neg(Col\ PAC) \rightarrow (Col\ ABC) \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}$$

Axiomes de dimension

- $\exists A, B, C | S_{ABC} \neq 0$
- $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} + S_{DBC}$

Axiomes de construction

- $(\forall A, B : Point,\ r : F), \exists P : Point \,|\, (Col\ ABP) \wedge \overline{AP} = r\overline{AB}$
- $\forall A, B, P, P' : Point,\ r : F\ A \neq B \rightarrow (Col\ ABP) \rightarrow \overline{AP} = r\overline{AB} \rightarrow (Col\ ABP') \rightarrow \overline{AP'} = r\overline{AB} \rightarrow P = P'$

Axiome des proportions

$A \neq C \rightarrow \neg(Col\ PAC) \rightarrow (Col\ ABC) \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}$

Axiomes de dimension

- $\exists\, A, B, C | S_{ABC} \neq 0$
- $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} + S_{DBC}$

Axiomes de construction

- $(\forall A, B : Point,\ r : F), \exists P : Point \,|\, (Col\ ABP) \wedge \overline{AP} = r\overline{AB}$
- $\forall A, B, P, P' : Point,\ r : F\ A \neq B \rightarrow (Col\ ABP) \rightarrow \overline{AP} = r\overline{AB} \rightarrow (Col\ ABP') \rightarrow \overline{AP'} = r\overline{AB} \rightarrow P = P'$

Axiome des proportions

$A \neq C \rightarrow \neg(Col\ PAC) \rightarrow (Col\ ABC) \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}$

Qu'est que cela axiomatise ?

Les géométries affines et métriques.

Qu'est ce que cela permet de démontrer ?

- des énoncés exprimés de manière constructive
- avec une égalité exprimée à l'aide de
  - ratios de distances
  - aires orientées
  - différences de Pythagore $(AB^2 + BC^2 - AC^2)$

Principe de fonctionnement de la méthode

Une idée simple :

1. Trouver un des *derniers* points construits
2. Trouver *comment* il a été construit
3. L'*éliminer* du but
4. Traiter les points *libres*

Principe de fonctionnement de la méthode

Une idée simple :

1. Trouver un des *derniers* points construits
2. Trouver *comment* il a été construit
3. L'*éliminer* du but

Traiter les points *libres*

Principe de fonctionnement de la méthode

Une idée simple :

1. Trouver un des *derniers* points construits
2. Trouver *comment* il a été construit
3. L'*éliminer* du but
4. Traiter les points *libres*

Principe de fonctionnement de la méthode

Une idée simple :

1. Trouver un des *derniers* points construits
2. Trouver *comment* il a été construit
3. L'*éliminer* du but
4. Traiter les points *libres*

Théorèmes de constructions

Les théorèmes de construction permettent :

- Construire un point sur une droite
- Construire un point sur une droite à une certaine distance
- Construire l'intersection de deux droites non parallèles
- Construire un point sur une droite parallèle à une autre et passant par un point
- ...

Théorèmes de constructions

Les théorèmes de construction permettent :

- Construire un point sur une droite
- Construire un point sur une droite à une certaine distance
- Construire l'intersection de deux droites non parallèles
- Construire un point sur une droite parallèle à une autre et passant par un point
- ...

Théorèmes de constructions

Les théorèmes de construction permettent :

- Construire un point sur une droite
- Construire un point sur une droite à une certaine distance
- Construire l'intersection de deux droites non parallèles
- Construire un point sur une droite parallèle à une autre et passant par un point
- ...

Théorèmes de constructions

Les théorèmes de construction permettent :

- Construire un point sur une droite
- Construire un point sur une droite à une certaine distance
- Construire l'intersection de deux droites non parallèles
- Construire un point sur une droite parallèle à une autre et passant par un point
- ...

Lemmes d'éliminations

Il faut éliminer :

- les ratios de distances orientées
- les aires orientées
- les différences de Pythagore

Exemple :

Si Y est construit comme intersection de (PQ) et (UV) :

$$S_{ABY} = \frac{S_{PUV} * S_{ABQ} + S_{QVU} * S_{ABP}}{(S_4 PUQV)}$$

Lemmes d'éliminations

Il faut éliminer :

- les ratios de distances orientées
- les aires orientées
- les différences de Pythagore

Exemple :

Si Y est construit comme intersection de (PQ) et (UV) :

$$S_{ABY} = \frac{S_{PUV} * S_{ABQ} + S_{QVU} * S_{ABP}}{(S_4 PUQV)}$$

Élimination des points libres

On prend trois points non colinéaires O,U et V

$$S_{ABY} = \begin{vmatrix} S_{OUA} & S_{OVA} & S_{UVA} \\ S_{OUB} & S_{OVB} & S_{UVB} \\ S_{OUY} & S_{OVY} & S_{UVY} \end{vmatrix}$$

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de "proof with"

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
-
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de “proof with”

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
- une tactique d'élimination des points libres
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de "proof with"

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
- une tactique d'élimination des points libres
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de "proof with"

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
- une tactique d'élimination des points libres
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de “proof with”

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
- une tactique d'élimination des points libres
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Implémentation en cours

- en utilisant LTac
- et un maximum de "proof with"

Organisation générale :

- une tactique d'élimination des points liés
- une tactique d'élimination des points libres
- des tactiques de simplification et normalisation
- un appel à Field

Les invariants

Il faut vérifier en permanence que :

- les dénominateurs sont non-nuls
- les ratios de distances ont pour supports des droites parallèles

Les invariants

Il faut vérifier en permanence que :

- les dénominateurs sont non-nuls
- les ratios de distances ont pour supports des droites parallèles

Quelques exemples :

- Ceva
- Menelaus
- Pascal
- Desargues
- les médianes d'un triangle se coupent en un même point
- la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté

Un exemple :

Théorème du centre de gravité.

Theorem Centroid :
(A,B,C,E,F,O:Point)
(midpoint F A C) $\rightarrow$ (midpoint E B C) $\rightarrow$
(C4 O A E B F) $\rightarrow$ O $\neq$ E $\rightarrow$
(Par A O O E) $\rightarrow$
A°O/O°E=2.

GeoInit.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H : (C3 F A C 1/2)
H0 : (C3 E B C 1/2)
H1 : (C4 O A E B F)
H2 : O≠E
H3 : (Par A O O E)
============================
A°O/O°E=2

Elimine_All.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : 1/2*(1/2*(-S A B C))≠0
============================
(-(1/2*(S A B C))/(1/2*(1/2*(-S A B C))))=2

FieldDecompose.

Proof completed.

Elimine O.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H : (C3 F A C 1/2)
H0 : (C3 E B C 1/2)
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : (S E B F)≠0
============================
(-(S A B F)/(S E B F))=2

Elimine E.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H : (C3 F A C 1/2)
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : 1/2*(S B F C)+(1-1/2)*(S B F B)≠0
============================
(-(S A B F)/(1/2*(S B F C)+(1-1/2)*(S B F B)))=2

Elimine F.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : 1/2*(1/2*(S C B C)+(1-1/2)*(S C B A))
+(1-1/2)*(1/2*(S B B C)+(1-1/2)*(S B B A))≠
0
============================
(-(1/2*(S A B C)+(1-1/2)*(S A B A))
/(1/2*(1/2*(S C B C)+(1-1/2)*(S C B A))
+(1-1/2)*(1/2*(S B B C)+(1-1/2)*(S B B A)))))=
2

basic_simpl.

1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : 1/2*(1/2*(S C B A))≠0
============================
(-(1/2*(S A B C))/(1/2*(1/2*(S C B A))))=2

unifydirsur.

```
1 subgoal
A : Point B : Point C : Point
E : Point F : Point O : Point
H4 : (Par A O E O)
H3 : E≠O
H5 : 1/2*(1/2*(-S A B C))≠0
============================
(-(1/2*(S A B C))/(1/2*(1/2*(-S A B C))))=2
```

FieldDecompose.

Proof completed.

Qu'est ce que cette formalisation apporte ?

- l'importance du maintient des invariants et des conditions de dégénérescence
- un détail sur un axiome
- le rôle de la logique constructive
- la possibilité de faire des inductions
- la crédibilité des preuves fournies (grâce à la validation par Coq)

Qu'est ce que cette formalisation apporte ?

- l'importance du maintient des invariants et des conditions de dégénérescence
- un détail sur un axiome
- le rôle de la logique constructive
- la possibilité de faire des inductions
- la crédibilité des preuves fournies (grâce à la validation par Coq)

Qu'est ce que cette formalisation apporte ?

- l'importance du maintient des invariants et des conditions de dégénérescence
- un détail sur un axiome
- le rôle de la logique constructive
- la possibilité de faire des inductions
- la crédibilité des preuves fournies (grâce à la validation par Coq)

Qu'est ce que cette formalisation apporte ?

- l'importance du maintient des invariants et des conditions de dégénérescence
- un détail sur un axiome
- le rôle de la logique constructive
- la possibilité de faire des inductions
- la crédibilité des preuves fournies (grâce à la validation par Coq)

Qu'est ce que cette formalisation apporte ?

- l'importance du maintient des invariants et des conditions de dégénérescence
- un détail sur un axiome
- le rôle de la logique constructive
- la possibilité de faire des inductions
- la crédibilité des preuves fournies (grâce à la validation par Coq)

Travail en cours

- Finir l'implémentation et les preuves
- Améliorer Ring et Field
- Définir un langage commun pour énoncer les théorèmes de géométrie élémentaire
- Construire un pont vers la contribution réalisée par Frédérique Guilhot

Travail en cours

- Finir l'implémentation et les preuves
- Améliorer Ring et Field
- Définir un langage commun pour énoncer les théorèmes de géométrie élémentaire
- Construire un pont vers la contribution réalisée par Frédérique Guilhot

Travail en cours

- Finir l'implémentation et les preuves
- Améliorer Ring et Field
- Définir un langage commun pour énoncer les théorèmes de géométrie élémentaire
- Construire un pont vers la contribution réalisée par Frédérique Guilhot

Travail en cours

- Finir l'implémentation et les preuves
- Améliorer Ring et Field
- Définir un langage commun pour énoncer les théorèmes de géométrie élémentaire
- Construire un pont vers la contribution réalisée par Frédérique Guilhot

Perspectives

- Une interface graphique de saisie des figures et des théorèmes.
- Implémentation de la méthode pour la 3ième dimension.
- Application à la pédagogie.

Perspectives

- Une interface graphique de saisie des figures et des théorèmes.
- Implémentation de la méthode pour la 3ième dimension.
- Application à la pédagogie.

Perspectives

- Une interface graphique de saisie des figures et des théorèmes.
- Implémentation de la méthode pour la 3ième dimension.
- Application à la pédagogie.