Les assistants de preuve et applications à l'apprentissage du raisonnement mathématique

Julien Narboux

Unité de formation et de recherche
de **mathématique** et d'**informatique**
Université de Strasbourg

Séminaire de Recherche en Didactique et Epistémologie des Mathématiques de Montpellier
Janvier 2017

Table des matières

Table des matières

Exemples de bugs fameux

Ariane Vol 501 (1996)

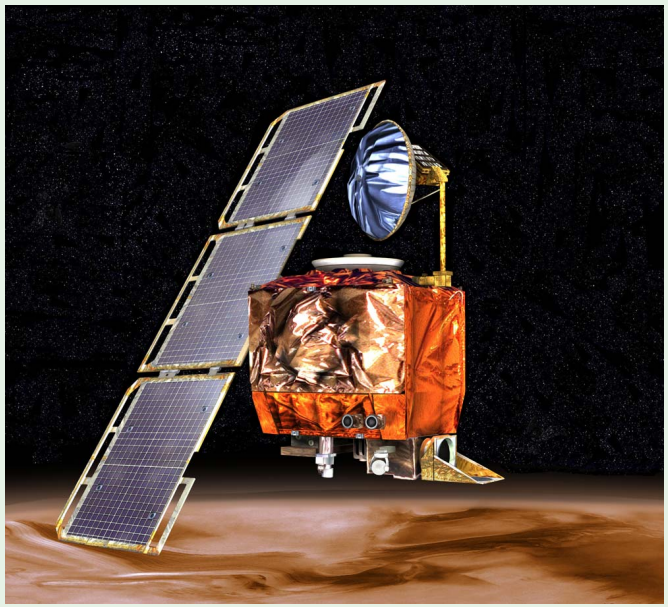
”The software exception was caused during execution of a data conversion from 64-bit floating point to 16-bit signed integer value. The floating point number which was converted had a value greater than what could be represented by a 16-bit signed integer. [...] The value was much higher than expected because the early part of the trajectory of Ariane 5 differs from that of Ariane 4 and results in considerably higher horizontal velocity values.”

Ariane 501 Inquiry Board report:
`http://esamultimedia.esa.int/docs/esa-x-1819eng.pdf`

Mars Climate Orbiter (1999)

”The ’root cause’ of the loss of the spacecraft was the failed translation of English units into metric units in a segment of ground-based, navigation-related mission software.”

Coût : $327 600 000.



Un exemple élémentaire

Exercice: écrire une programme qui retourne la valeur absolue d'un entier x[a].

```
int abs(int x)
   {
    int z;
    if (x<0)
     z=-x;
    else
     z=x;
    return z;
}
```

[a]Source: David Mentré

Un exemple élémentaire

Exercice: écrire une programme qui retourne la valeur absolue d'un entier x[a].

```
int abs(int x)
  {
   int z;
   if (x<0)
    z=-x;
   else
    z=x;
   return z;
}
```

[a]Source: David Mentré

Ce programme est faux !

Si $x = -2^{31}$, 2^{31} n'existe pas.

Table des matières

Le géométrie est centrale dans l'histoire des preuves

Euclide (−325-−265) *Les éléments.*
La méthode axiomatique

Hilbert (1862-1943) *Die Grundlagen der Geometrie.*
Les mathématiques formelles

Tarski (1902-1983) *Metamathematische Methoden in der Geometrie*.
Automatisation, axiomatisation

Le géométrie est centrale dans l'histoire des preuves

Euclide (−325-−265) *Les éléments.*
La méthode axiomatique

Hilbert (1862-1943) *Die Grundlagen der Geometrie.*
Les mathématiques formelles

Tarski (1902-1983) *Metamathematische Methoden in der Geometrie*.
Automatisation, axiomatisation

Le géométrie est centrale dans l'histoire des preuves

Euclide (−325-−265) *Les éléments.*
La méthode axiomatique

Hilbert (1862-1943) *Die Grundlagen der Geometrie.*
Les mathématiques formelles

Tarski (1902-1983) *Metamathematische Methoden in der Geometrie*.
Automatisation, axiomatisation

Des preuves incomplètes:

Les éléments. La première construction suppose l'existence de l'intersection entre deux cercles donnés.

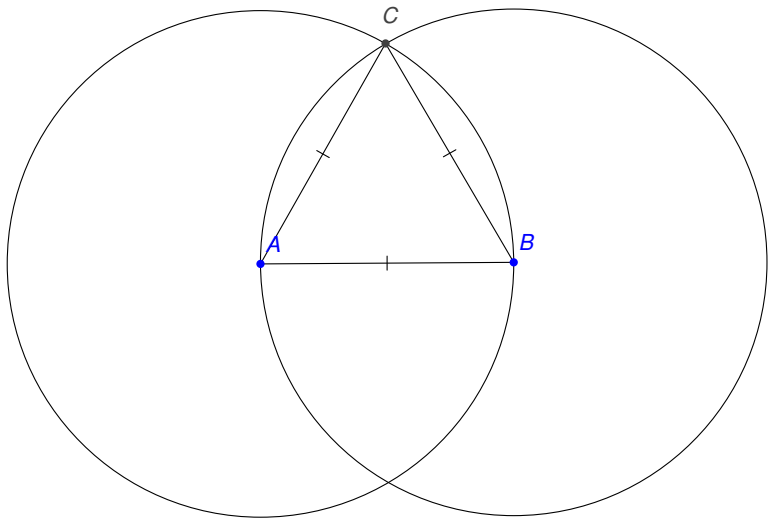
Die Grundlagen der Geometrie. Certaines preuves non triviales sont présentées comme évidentes dans les premières éditions.

Exemple de proposition

Proposition (Livre I, Prop. 1)

Soient A et B deux points, construire un triangle équilatéral ayant pour base AB.

Preuve: Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centres A et B et de rayon AB. Soit C l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. La distance AB est égale à la distance AC et la distance AB est égale à la distance BC. Donc ABC est équilatéral.



Imprécisions dans les Éléments

Problème

Les postulats d'Euclide ne permettent pas de déduire que C existe.

- Hilbert a proposé un système axiomatique pour combler les lacunes dans les Éléments, les preuves ne sont pas les mêmes.
- Avigad, Dean et Mumma ont proposé une axiomatique alternative qui permet de justifier les preuves originales [1].

[1] Jeremy Avigad, Edward Dean, and John Mumma (2009). "A Formal System for Euclid's Elements". In: *The Review of Symbolic Logic 2*

Mais aussi une longue succession de preuves fausses du 5ième postulat d'Euclide:

En 1763, dans sa thèse Klügel une liste de 30 preuves fausses du postulat des parallèles.

- Ptolemée admet implicitement l'unicité des parallèles.
- Proclus admet implicitement qui deux droites sont parallèles, toute droite qui intersecte l'une intersecte l'autre.
- Legendre a publié plusieurs preuves fausses du 5ième postulat dans le 'best-seller' "Éléments de géométrie".
- ...

Postulat du triangle

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

Adrien-Marie Legendre

(caricature de

Julien Léopold Boilly)

Postulat du triangle

“Il n’en est pas moins certain que le théorème sur la somme des trois angles du triangle doit être regardé comme l’une de ces vérités fondamentales qu’il est impossible de contester [...].”

Adrien-Marie Legendre

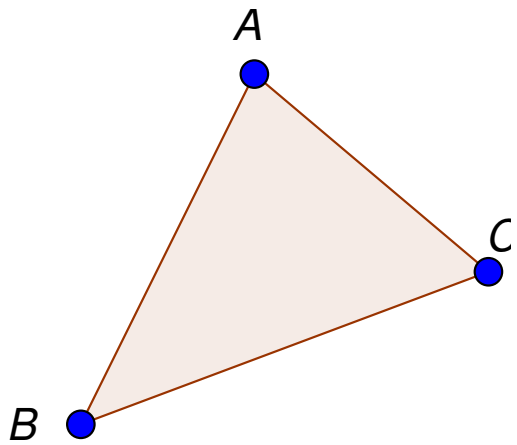
(caricature de

Julien Léopold Boilly)

Table des matières

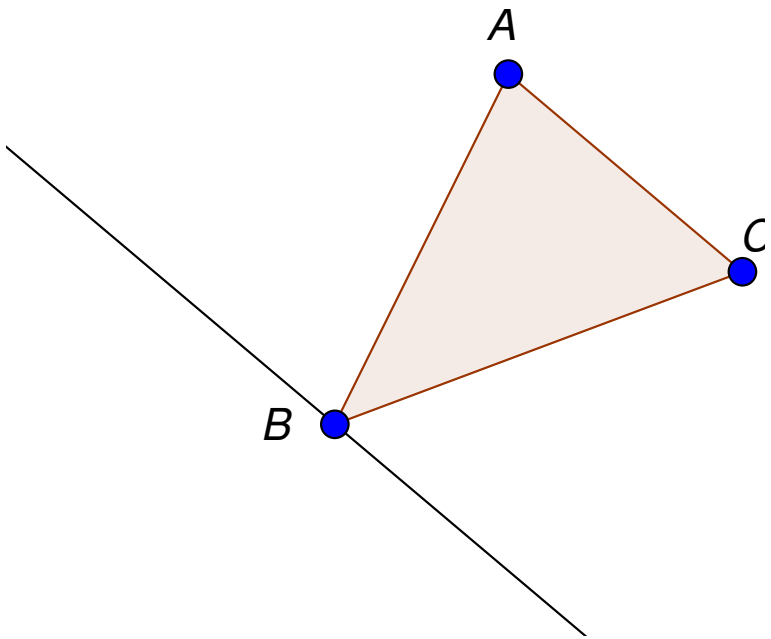
La somme des angles d'un triangle

On construit une parallèle à AC passant par B.



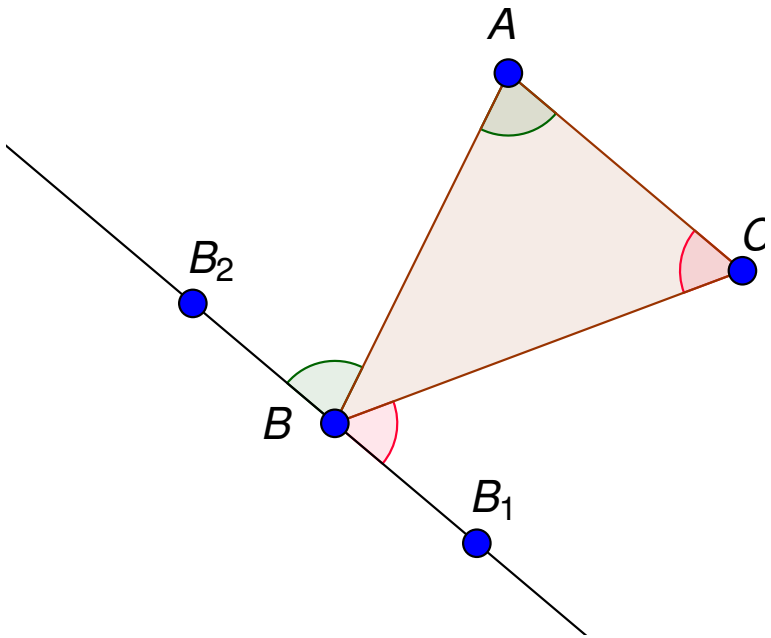
La somme des angles d'un triangle

On construit une parallèle à AC passant par B.



La somme des angles d'un triangle

On construit une parallèle à AC passant par B.

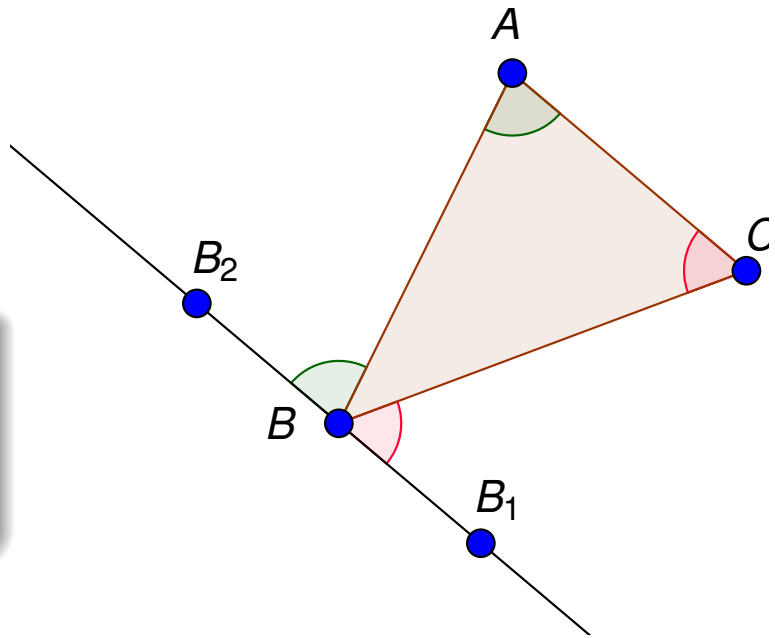


La somme des angles d'un triangle

On construit une parallèle à AC passant par B.

Problème !

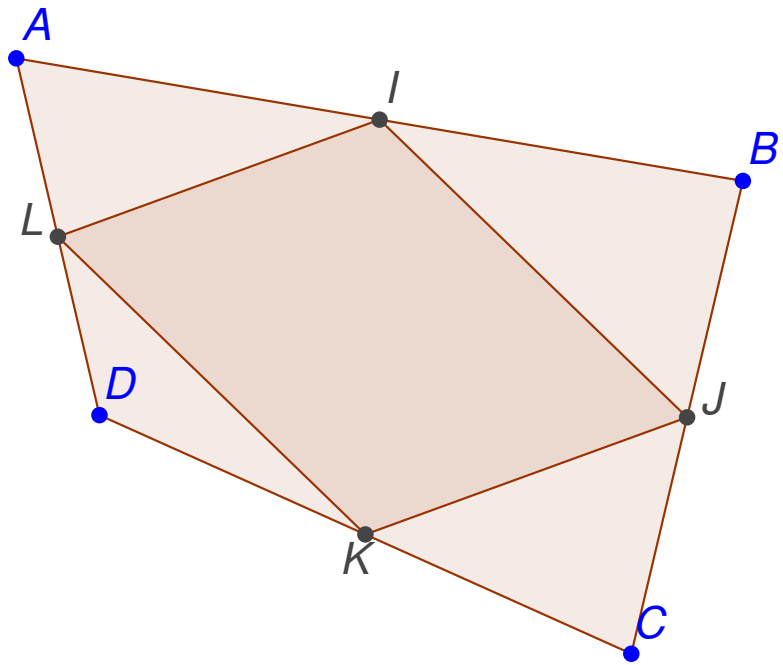
Il faut montrer (ou admettre) que les angles sont alternes-internes.



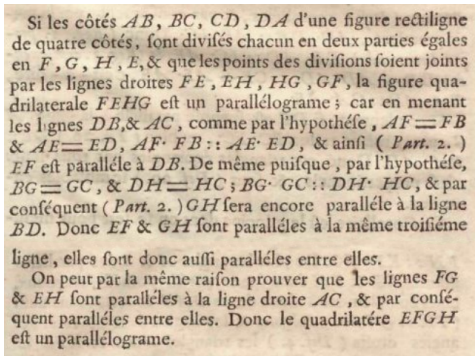
Le théorème de Varignon

Theorem

Soit ABCD un quadrilatère. Soient I, J, K et L les milieux de AB, BC, CD, et AD, alors IJKL est un parallelogramme.



La preuve usuelle utilise le théorème de la droite des milieux:
Dans le triangle ABC on a $AC \parallel IJ$.
De même, on a $AC \parallel LK$. D'où $LK \parallel IJ$.
De même $IL \parallel JK$.

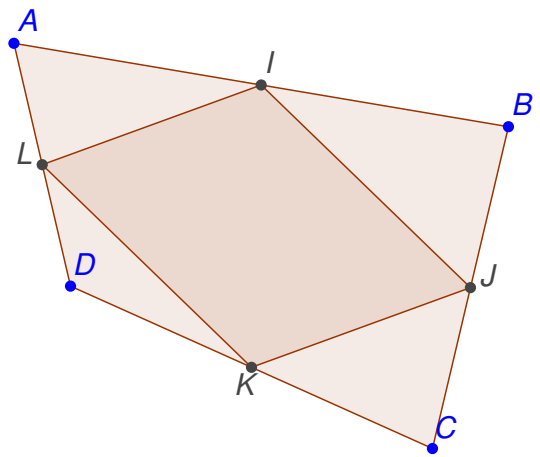


Si les côtés AB, BC, CD, DA d'une figure rectiligne de quatre côtés, sont divisés chacun en deux parties égales en F, G, H, E, & que les points des divisions soient joints par les lignes droites FE, EH, HG, GF, la figure quadrilaterale $FEHG$ est un parallélograme; car en menant les lignes DB, & AC, comme par l'hypothèse, $AF = FB$ & $AE = ED$, $AF \cdot FB :: AE \cdot ED$, & ainsi (*Part.* 2.) EF est paralléle à DB. De même puisque, par l'hypothèse, $BG = GC$, & $DH = HC$; $BG \cdot GC :: DH \cdot HC$, & par conséquent (*Part.* 2.) GH sera encore paralléle à la ligne BD. Donc EF & GH sont paralléles à la même troisiéme ligne, elles sont donc aussi paralléles entre elles.

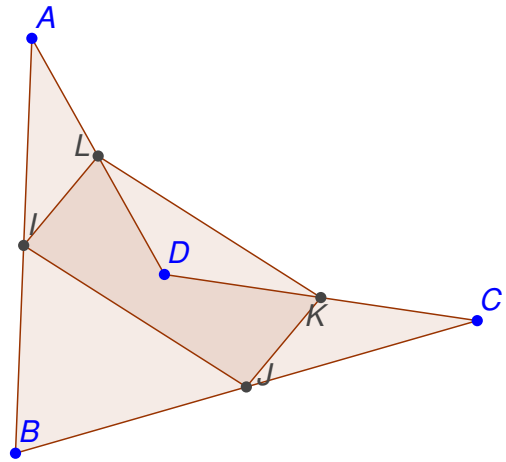
On peut par la même raison prouver que les lignes FG & EH sont paralléles à la ligne droite AC, & par conséquent paralléles entre elles. Donc le quadrilatére $EFGH$ est un parallélograme.

Preuve originale

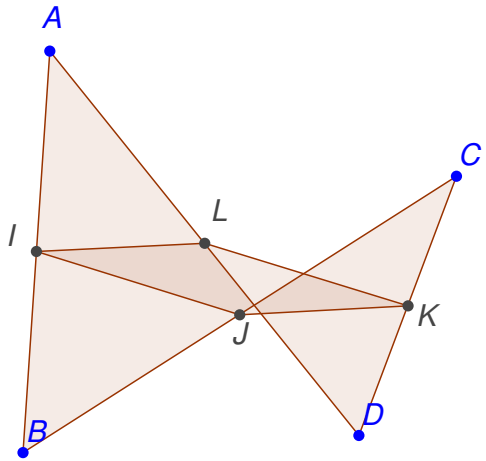
Le théorème de Varignon



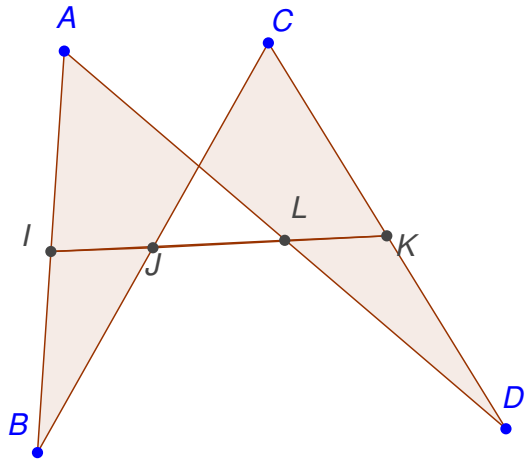
(a) Convex case



(b) Concave case



(c) Self-intersecting case



(d) Special case

Table des matières

Un exemple récent

”In October, 1998, Carlos Simpson submitted to the arXiv preprint server a paper called “Homotopy types of strict 3-groupoids”. It claimed to provide an argument that implied that the main result of the ”∞-groupoids” paper, which M. Kapranov and I had published in 1989, can not be true. However, Kapranov and I had considered a similar critique ourselves and had convinced each other that it did not apply. I was sure that we were right until the Fall of 2013 (!!).”

Vladimir Voevodsky

Source:
`http://www.math.ias.edu/vladimir/files/2014_IAS.pdf`,
page 9.

”It soon became clear that the only real long-term solution to the problems that I encountered is to start using computers in the verification of mathematical reasoning. ”

Vladimir Voevodsky (médaille field 2002)

Source:
`http://www.math.ias.edu/vladimir/files/2014_IAS.pdf`,
page 13.

Bug dans les vérificateurs de preuves

Extrait de la liste des changements entre deux versions de Coq:

```
Changes from V8.5pl2 to V8.5pl3
===============================

Critical bugfix

- #4876: Guard checker incompleteness when using primitive projections
```

En clair, avec Coq V8.5pl2 (par exemple) on pouvait prouver faux !

Pour résumer

Quelques types d'erreurs:

- Trou dans la preuve/cas oublié/hypothèse implicite
- Circularité
- Définitions changeantes
- Erreur de manipulation de quantificateurs

Les erreurs:

- Tout le monde en fait: du collègien au médaille field
- C'est normal.
- On n'en parle pas.

Les erreurs:

- Tout le monde en fait: du collègien au médaille field
- C'est normal.
- On n'en parle pas.

Mais !

Heureusement !

L'humain arrive très bien à faire des preuves quasi-correctes même en ayant fait une erreur précédemment !

Attention !

Ce n'est pas vrai des prouveurs automatiques:
erreur de typo $\rightarrow$ hypothèses contradictoires $\rightarrow$ preuve de faux $\rightarrow$ preuve triviale.

Table des matières

Qu'est-ce qu'une preuve ?

1. un argument convainquant

Qu'est-ce qu'une preuve ?

1. un argument convainquant
2. une suite de déductions à partir des axiomes

Qu'est-ce qu'une preuve ?

1. un argument convainquant
2. une suite de déductions à partir des axiomes
3. un algorithme (correspondance de Curry-Howard)

Point de vue

On peut voir une *preuve informelle* comme un argument pour convaincre le lecteur de l'existence d'une *preuve formelle*.

"Du point de vue épistémologique, les considérations précédentes montrent qu'il suffit de savoir transcrire une démonstration mathématique en déduction naturelle dans le système de Quine pour être assuré de ***l'existence d'une transcription formalisée*** *dans le cadre théorique du calcul des prédicats. Autrement dit, la distance entre démonstration pratique et démonstration formalisée n'est peut-être pas aussi infranchissable qu'on l'affirme parfois." dans MÉTHODES DE RAISONNEMENT ET LEURS MODÉLISATIONS LOGIQUES. SPÉCIFICITÉ DE L'ANALYSE. QUELLES IMPLICATIONS DIDACTIQUES ? Viviane Durand-Guerrier, Gilbert Arsac, volume 23-3, 2003 Recherches en didactique des mathématiques.*

Processus social

Remarque

Même quand on a une preuve formalisée, cela reste un processus social, il faut se convaincre que les hypothèses, définitions et l'énoncé sont bien conformes à ce que l'on souhaite démontrer.

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique
3. définitions incohérentes

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique
3. définitions incohérentes
4. présence de calculs non vérifiables à la main

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique
3. définitions incohérentes
4. présence de calculs non vérifiables à la main
5. preuves très longues

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique
3. définitions incohérentes
4. présence de calculs non vérifiables à la main
5. preuves très longues
6. preuves très compliquées

Oui mais...

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

1. hypothèses implicites
2. erreur typographique
3. définitions incohérentes
4. présence de calculs non vérifiables à la main
5. preuves très longues
6. preuves très compliquées
7. trop de détails techniques, trop de cas pour les traiter à la main sans faire d'erreurs

Heureusement !

Par définition vérifier qu'une preuve est correcte est un problème *décidable*.

Heureusement !

Par définition vérifier qu'une preuve est correcte est un problème *décidable*.

On peut donc construire des assistants de preuve!

Exemples

- Automath (1967)
- Coq (1984)
- HOL-Light (90s)
- HOL (1988)
- Isabelle (1986)
- Lean (2013)
- Matita (1999)
- Mizar (1973)
- ...

Qu'est-ce qu'un assistant de preuve ?

Un logiciel qui permet de :

- définir des notions mathématiques et/ou des programmes
- démontrer mécaniquement des théorèmes mathématiques mettant en jeu ces définitions

Qu'est-ce qu'un assistant de preuve ?

Un logiciel qui permet de :

- définir des notions mathématiques et/ou des programmes
- démontrer mécaniquement des théorèmes mathématiques mettant en jeu ces définitions

Qu'est-ce que ce n'est pas ?

- Un démonstrateur automatique
- Un outil qui facilite l'obtention des preuves

Processus de preuve

Les deux étapes du développement d'une démonstration dans Coq sont les suivantes :

- d'abord la **construction interactive** d'une démonstration *par l'utilisateur*;
- et la **vérification automatique** de la correction de démonstration *par le système*.

L'utilisateur prouve, et le système vérifie que la preuve est bien correcte.

Les langages pour décrire les preuves

Impérative On donne des ordres (appelés tactiques) pour compléter l'arbre de preuve qui est en construction (LCF Style)

Déclarative On décrit les assertions mathématiques que l'on veut déduire et une justification.

Le concept de noyau

- Les règles élémentaires sont dans le noyau.
- On doit faire **confiance** au noyau.
- Mais on a tout autour des mécanismes (notations, coercions, automatisation) pour **aider** à générer la suite d'application de règles élémentaires.

Exemples d'énoncés mathématiques

- "Si les portes sont ouvertes c'est que la rame est en face d'un quai".
- $$\sum_{0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démo

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démo

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$$

Démo

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$$

En Coq:

```
Lemma sun_n : forall n:nat, 2*(sum_int n)=n*(n+1).
```

Démo

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$$

En Coq:

```
Lemma sun_n : forall n:nat, 2*(sum_int n)=n*(n+1).
```

Oui, mais comment est définie l'opération $\sum$?

Démo

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$$

En Coq:

```
Lemma sun_n : forall n:nat, 2*(sum_int n)=n*(n+1).
```

Oui, mais comment est définie l'opération $\sum$?

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = n + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

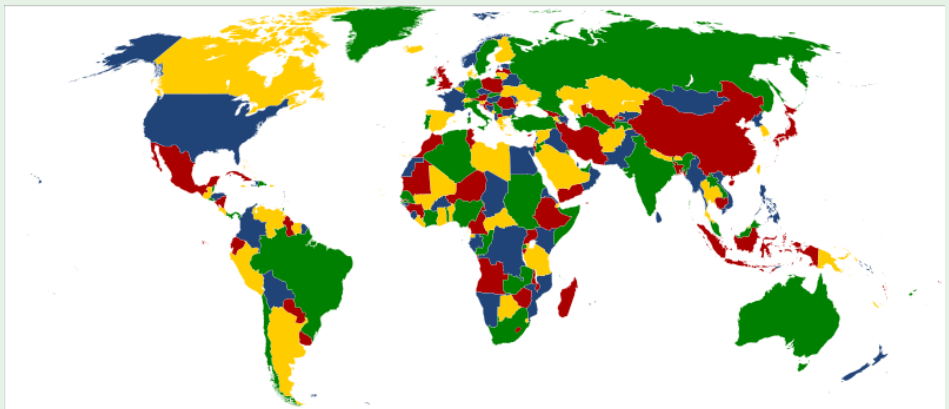
Le problème de la vérification d'une preuve

Présence de calculs

Théorème des 4 couleurs

Quatre couleurs suffisent pour colorier une carte géographique *plane* sans que deux pays ayant une *frontière* en commun ne soient de la même couleur.

- 1879 "Preuve" fausse par Kempe
- 1890 Heaywood trouve l'erreur
- 1976 Appel and Hake (1478 configurations, 1200 heures de calcul)
- 2004 Formalisation en Coq par Gonthier et Werner



Conjecture de Kepler/Théorème de Hales

Pour un empilement de sphères égales, la densité maximale est atteinte pour un empilement cubique à faces centrées.

Photo par Robert Cudmore

1998 Preuve par Thomas Hales
Robert MacPherson, éditeur, écrit que:

"The news from the referees is bad, from my perspective. They have not been able to certify the correctness of the proof, and will not be able to certify it in the future, because they have run out of energy to devote to the problem. This is not what I had hoped for. The referees put a level of energy into this that is, in my experience, unprecedented."

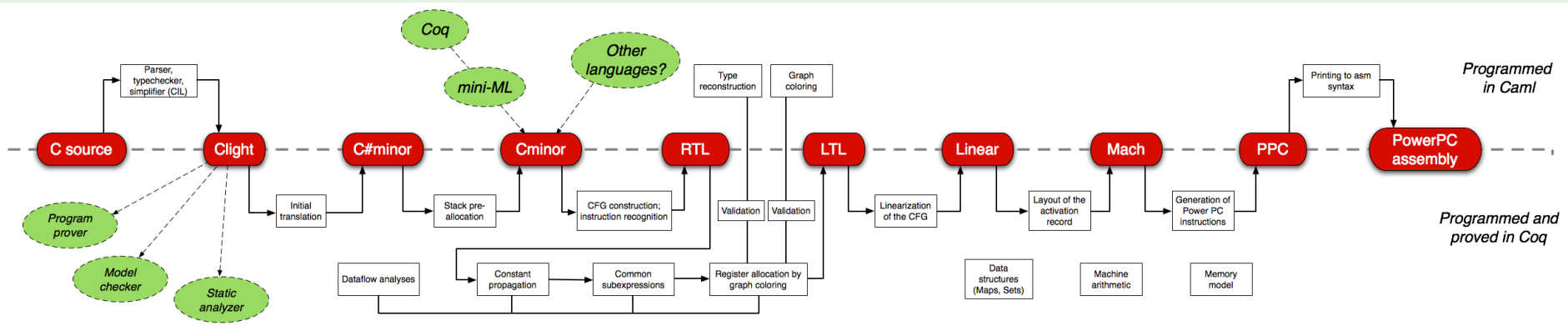
2004 - 2014 Projet Flyspeck: formalisation du théorème en HOL-light avec des contributions en Coq et Isabelle

Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

Un compilateur

CompCert un compilateur C prouvé formellement (Xavier Leroy).
Génère de l'assembleur PowerPC et ARM à partir de code C.
Preuve formelle de la correction: le code assembleur se comporte de la même manière que le code source.



Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

Système de pilotage d'une ligne de métro

- Méthode B
- Paris (ligne 14, 1998), Paris (ligne 1, 2005), Lyon (ligne D), ...

Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

Un système d'exploitation

sel4 : Micro kernel prouvé en Isabelle/HOL.
Preuve: 165000 lignes, 11 années/homme.
Code: 15000 lignes, 2.5 années/homme.

Le problème de la vérification d'une preuve I

La taille de la preuve

Théorème de Feit-Thompson

```
Theorem Feit_Thompson (gT:finGroupType)
                      (G:{group gT}):
odd ##|G| -> solvable G.
```

Preuve en Coq par Georges Gonthier et son équipe (septembre 2012)[a]:
170 000 lignes, 4 200 théorèmes

[a] http://ssr2.msr-inria.inria.fr/~jenkins/current/progress.html

Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

Un système de gestion de cartes à puces

Gemalto: preuve formelle avec Coq. Certification d'un système JavaCard au niveau EAL7.

Mon Projet: GeoCoq

Objectif

Une sorte de version moderne **vérifiée formellement** des Éléments d'Euclide et des fondements de la géométrie en général.

Fondements de la géométrie

1. Approche synthétique
2. Approche analytique
3. Approche métrique
4. Approche à base de transformations

Approche synthétique

On se donne des objets géométriques indéfinis + des prédicats géométriques + des axiomes à propos de ces prédicats . . .
Les noms des types d'objets de bases n'ont pas d'importance théorique:

> *On doit pouvoir remplacer partout points, droites et plans, par tables, chaises, et tasses.* *David Hilbert*

- Les axiomes de Hilbert:

types: points, droites et plans
prédicats: incidence, between, congruence de segments, congruence d'angles

- Les axiomes de Tarski:

types: points
prédicats: between, congruence

- . . . il existe plein d'autres variantes

Exemples de livres utilisant une approche synthétique:

- Euclide (1998). *Les Éléments*. *Les Éléments*
- David Hilbert (1899). *Grundlagen der Geometrie*. *Grundlagen der Geometrie*
- Borsuk and Szmielew: *Foundations of Geometry*
- Robin Hartshorne (2000). *Geometry : Euclid and beyond*. Undergraduate texts in mathematics *Geometry: Euclid and Beyond*
- Marvin J. Greenberg (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. *Euclidean and non-euclidean Geometries, Development and History*
- Specht *et. al.*: *Euclidean Geometry and its Subgeometries*

Approche analytique

On suppose qu'on a des nombres (un corps $\mathbb{F}$).
On définit les objets géométriques par leurs coordonnées.
Points := $\mathbb{F}^n$

Approche métrique

Approche intermédiaire entre l'approche analytique et synthétique.
On suppose que l'on a à la fois:

- des nombres (un corps)
- des objets géométriques
- des axiomes

  Les axiomes de Birkhoff: des points, des droites, des réels, des règles graduées et des rapporteurs

  Les axiomes de Chou-Gao-Zhang: des points, des réels, trois quantités géométriques

Exemples de livres utilisant l'approche métrique:

- E.E. Moise (1990). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*.
- Richard S Millman and George D Parker (1991). *Geometry, A Metric Approach with Models*.

Approche par groupe de transformations

Le programme d'Erlangen[2].
Fonder la géométrie sur la notion d'action de groupe et d'invariant.

Felix Klein

[2] Felix C. Klein (1872). "A comparative review of recent researches in geometry". PhD thesis

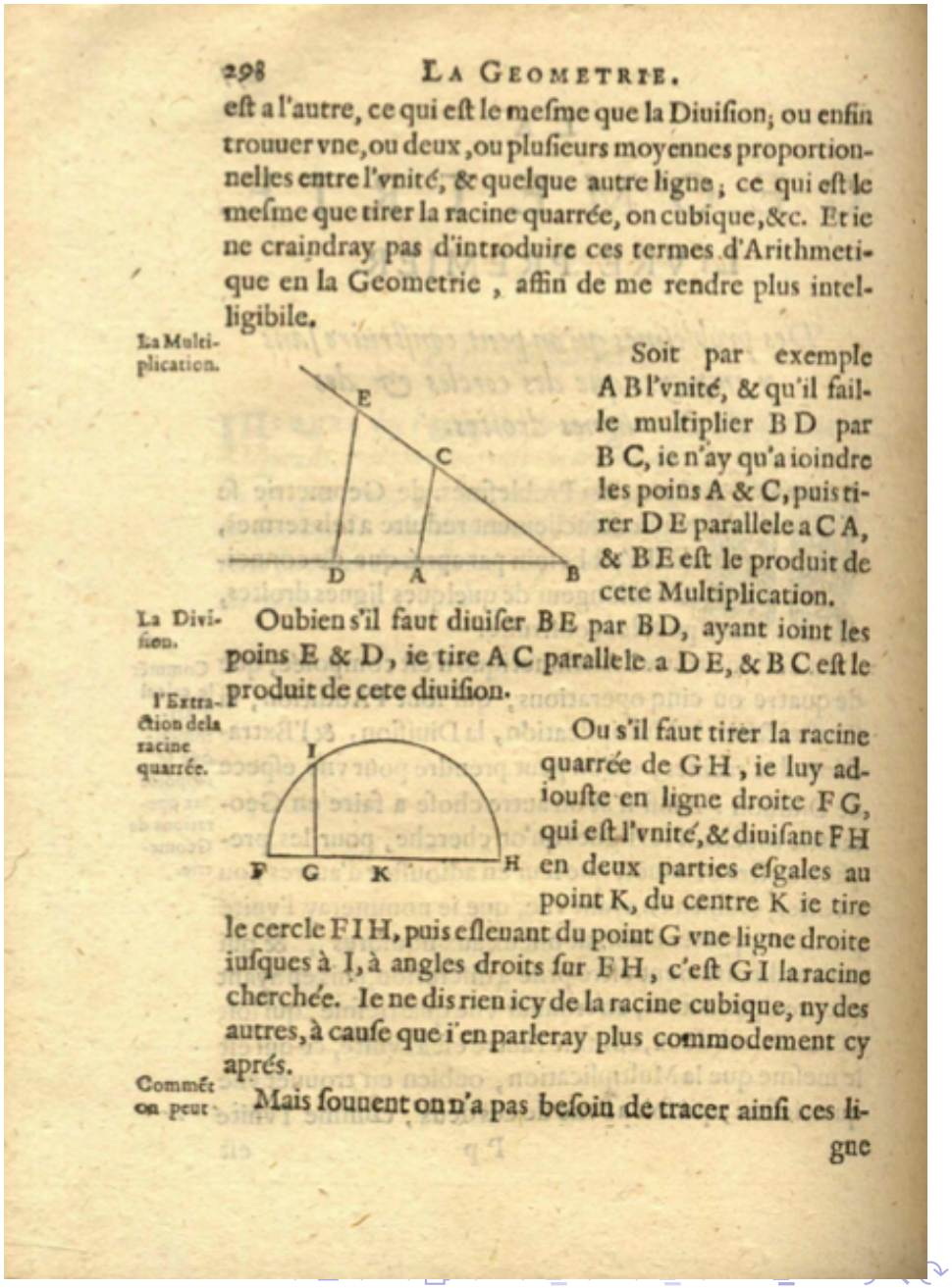
Éléments de comparaison

L'approche synthétique a un intérêt: elle permet d'avoir des résultats valables dans plusieurs modèles, par exemple en *géométrie neutre*.
L'approche analytique a un intérêt majeur, les calculs facilitent les preuves:

> *As long as algebra and geometry traveled separate paths their advance was slow and their applications limited. But when these two sciences joined company, they drew from each other fresh vitality, and thenceforth marched on at a rapid pace toward perfection.*
>
> *(Joseph-Louis Lagrange, Leçons élémentaires sur les mathématiques; quoted by Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to modern Times, p. 322)*

Arithmétisation de la géométrie

René Descartes (1925). *La géométrie*.



298 LA GEOMETRIE.

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Division.

Ou bien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

L'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Comment on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces ligne

GeoCoq

- Une bibliothèque open source de preuves formelles en géométrie
- Écrite par Gabriel Braun, Pierre Boutry, Charly Gries et Julien Narboux
- Licence LGPL3: permet une utilisation commerciale

Vue d'ensemble de GeoCoq

Axiomatiques

Axiomatiques de Tarski, Hilbert ou approche analytique.
De nombreuses variantes de l'axiome des parallèles.

Quelques chiffres

- 100 kloc
- 2700 lemmes
- 350 définitions

Automatisation

- Méthode des aires
- Méthodes algèbriques

Quelques théorèmes connus

- Pappus, Desargues, Pythagore, Thales
- Thales dans le cercle
- Droite des milieux
- Congruences des triangles
- Propriétés des quadrilatères
- Centres usuels des triangles
- Droite d'Euler
- ...

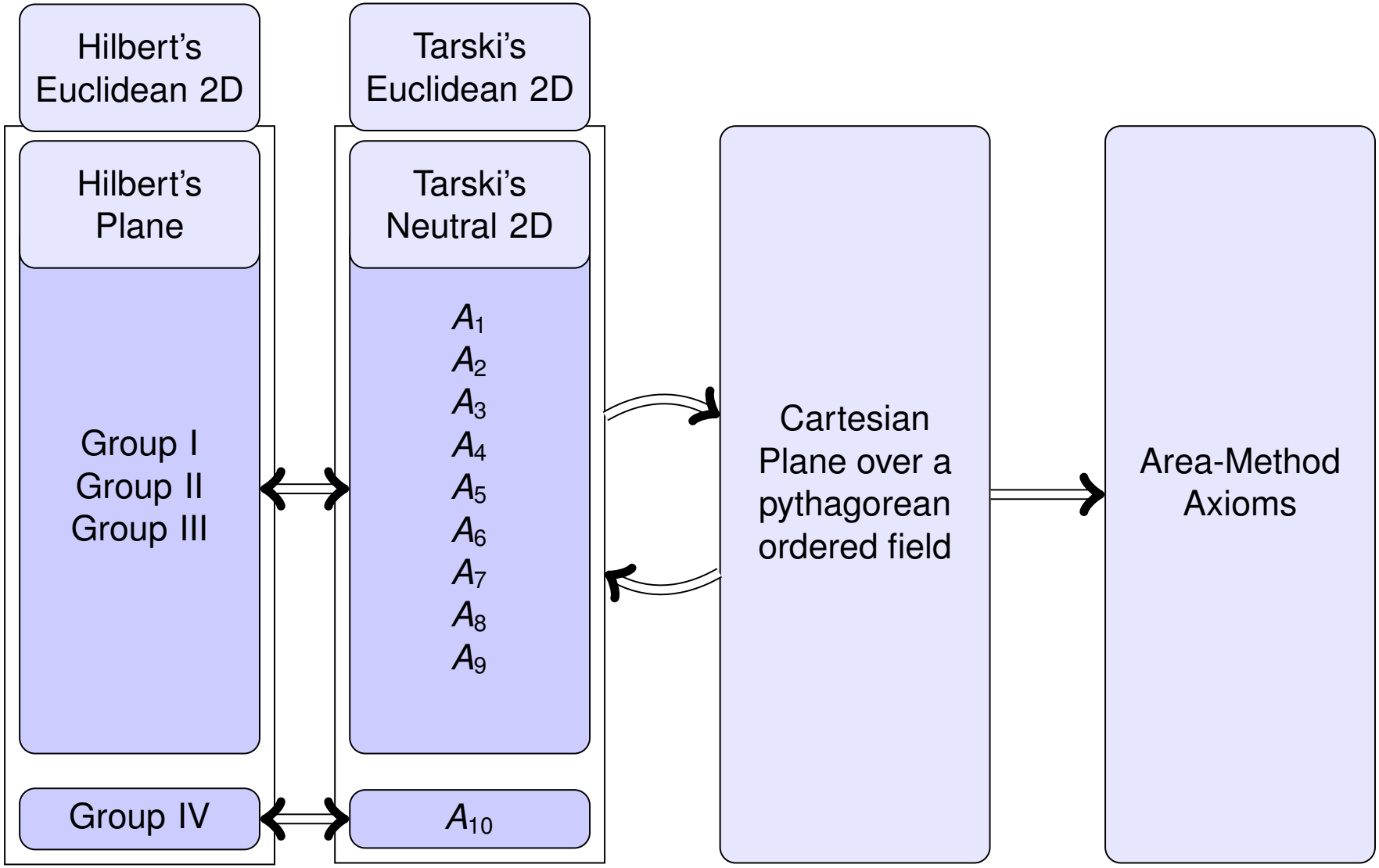

Hilbert's Euclidean 2D
Tarski's Euclidean 2D
Hilbert's Plane
Tarski's Neutral 2D
Group I
Group II
Group III
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
Group IV
A_{10}
Cartesian Plane over a pythagorean ordered field
Area-Method Axioms

Table des matières

L'ordinateur pour l'enseignement des maths

On utilise des logiciels

1. pour faire des calculs numériques
2. pour faire des calculs symboliques (Maple...)
3. pour faire des conjecture et exercices de construction (Cabri, ..., GeoGebra)
4. tester si une conjecture est "vraie" (GeoGebra récent)

Mais bizarrement

assez peu pour faire des **preuves** !

“Among mathematicians computer proof verification was almost a forbidden subject. A conversation started about the need for computer proof assistants would invariably drift to the Goedel Incompleteness Theorem (which has nothing to do with the actual problem) or to one or two cases of verification of already existing proofs, which were used only to demonstrate how impractical the whole idea was.”

Voevodsky

Enseignement de la preuve

- Les enseignants ne connaissent souvent pas la logique, et en n'éprouvent pas le besoin.
- Seules quelques règles sont expliquées: absurde, contraposée, raisonnement par cas.
- L'apprentissage se fait principalement par imitation et vérification sémantique.

Point de vue

La preuve peut être vue comme une partie d'un jeu, il devient alors évident qu'il faut:

- expliciter les règles
- montrer le plateau

Thèse

Avoir une définition précise de preuve aide à expliquer ce qui est attendu.

Preuve formelle vs informelle

”La preuve formelle est impossible à obtenir.”
Objectifs du domaine:

1. Montrer que c’est faux.
2. Réduire le fossé entre la preuve formelle et la preuve informelle.

Granularité

La granularité usuelle n'est pas celle des règles de la logique.

Exemple: la preuve de $A \Rightarrow A$ dans le système de Hilbert.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))}\,\mathrm{S} \qquad \dfrac{}{(A \to ((B \to A) \to A)}\,\mathrm{K}}{(A \to (B \to A)) \to (A \to A)}\,\mathrm{MP} \qquad \dfrac{}{A \to (B \to A)}\,\mathrm{K}}{A \to A}\,\mathrm{MP}$$

Un vernaculaire mathématique

La logique cohérente.

$$\forall x, H_1(x) \wedge \ldots \wedge H_n(x) \rightarrow \quad \exists y, P_1(x,y) \wedge \ldots P_k(x,y) \vee \ldots$$

Plusieurs auteurs ont identifié ce fragment de la logique du premier ordre comme pertinent pour l'automatisation ou la lisibilité.
on obtient des preuves **relativement** lisibles [3].

[3] Sana Stojanović et al. (2014). "A Vernacular for Coherent Logic". English. In: *Intelligent Computer Mathematics*. Vol. 8543. Lecture Notes in Computer Science

Pourquoi utiliser un assistant de preuve pour enseigner la preuve ?

- Clarifier les règles du jeu: les règles de raisonnement sont explicites.
- Clarifier le contexte: les théorèmes admis sont explicites.
- Un critère objectif pour la correction d'une preuve: pas de conflits
- Clarifie les différentes notions de base: axiome, hypothèse, lemme, théorème, conjecture, contre-exemple...
- Distingue les hypothèses, de celles du dessin.
- Boucle d'interaction: l'ordinateur se lasse moins vite de corriger des copies
- Motivation: effet jeu vidéo
- Automatisation: possibilité d'entraînement à la maison, correction automatique

Disclaimer

- En complément d'une approche classique car ne mobilise pas toutes les compétences attendues:
  - Connaître les définitions et les théorèmes (le système le fait pour vous)
  - Savoir si un théorème s'applique ou pas (le système vous aide)
  - Savoir modéliser
- Utilisable uniquement pour des exercices simples: premières inductions, preuves sur les fonctions injective/surjective
- L'objectif n'est pas d'automatiser la correction

Limites

Limites

- L'utilisation d'un assistant de preuve permet de travailler un seul aspect: la rédaction d'une preuve pour **vérifier** pas pour **expliquer**.
- Cela ne permet pas de discuter et comprendre les définitions, connaître ses théorèmes, faire des conjecture, ...
- A mon sens un outil utile à un moment de l'apprentissage (L1)

Difficultés

- Trouver le bon langage/la bonne interface
- Avoir les fondements formalisés
- Rendre implicite/automatique ce qui doit l'être (en fonction du contexte)

Travaux existants

Deux communautés:

1. Didactique
2. Informatique/Logique

Travaux issus du monde de la didactique

Geometry Tutor [4], MENTONIEZH [5], DEFI [6], CHYPRE [7], Geometrix [8], Cabri Euclide [9], Baghera [10], AgentGeom, geogebraTUTOR and Turing [11]

---

[4] John R. Anderson, C. F. Boyle, and Gregg Yost (1985). "The geometry Tutor". In: *IJCAI Proceedings*

[5] Dominique Py (1990). "Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur intelligent de la géométrie". PhD thesis. Université de Rennes

[6] Ag-Almouloud (1992). "L'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques". PhD thesis. Université de Rennes

[7] Philippe Bernat (1993). *CHYPRE: Un logiciel d'aide au raisonnement*. Tech. rep. 10. IREM

[8] Jacques Gressier (1988). *Geometrix*.

[9] Vanda Luengo (1997). "Cabri-Euclide: Un micromonde de Preuve intégrant la réfutation". PhD thesis. Université Joseph Fourier

[10] Nicolas Balacheff et al. (1999). *Baghera*.

[11] Philippe R. Richard et al. (2011). "Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry". en. In: *ZDM* 43.3

Preuve interactive pour l'enseignement

En informatique

- Niveau Master - preuve de programmes, sémantique des langages de programmation, théorie des langages de programmation: U-Penn, Portland, Princeton, Harvard, Warsaw, CNAM, Lyon, Nice, Paris, Strasbourg, ...

En mathématiques

- Niveau Licence - Logique: Bordeaux, Warsaw, Pohang
- Niveau Licence - Maths générales: Nijmegen (ProofWeb), Nice (CoqWeb)
- Niveau Master - Géométrie: Strasbourg
- ...

Lurch

Lurch (Carter et Monks)

”Un traitement de texte qui vérifie les preuves”

- Input sous forme de texte
- **Pseudo** langue naturelle
- Avec annotations

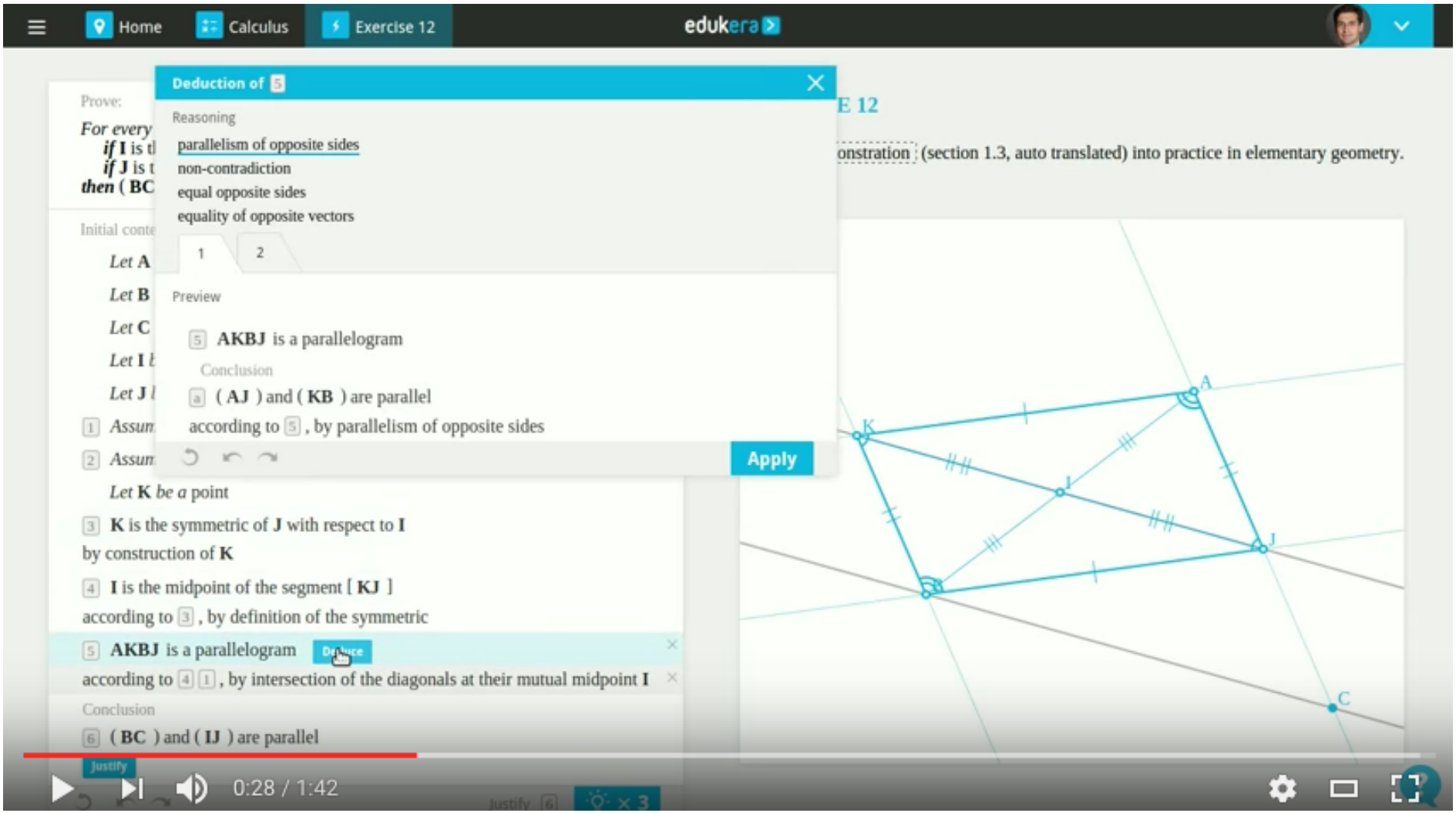
Theorem: *There does not exist a set of all sets which are not members of themselves.*

Proof:
(*) Assume $\exists S, S=\{x : x \notin x\}$.
Let R be such a set, i.e. $R=\{x : x \notin x\}$ by El.
Suppose $R \in R$.
Then $R \in \{x : x \notin x\}$ by substitution,
and so $R \notin R$ by the definition of set builder notation.
But this is equivalent to $\neg R \in R$ by the definition of $\notin$.
This is a contradiction to our assumption that $R \in R$ by the definition of contradiction.
Hence we have a proof by contradiction that $\neg(R \in R)$
(since assuming $R \in R$ led to a contradiction).
But this shows that $R \notin R$ by the definition of $\notin$
which in turn implies that $R \in \{x : x \notin x\}$ by the definition of set builder notation.
So $R \in R$ by substitution since $R=\{x : x \notin x\}$.
Once again this is a contradiction to our proof that $\neg(R \in R)$ by the definition of contradiction.
Hence $\neg \exists S, S=\{x : x \notin x\}$ by another proof by contradiction since assuming (*) led to a contradiction.
■

Edukera

- Application web pour faire des preuves de manière interactive
- Embarque Coq
- Expériences dans quelques universités françaises
- Input: souris, la syntaxe est toujours correcte par construction (un peu comme en Scratch pour la programmation)
- Que des déductions correctes (même si pas forcement les bonnes)
- Variables du raisonnement (meta-variables)

Edukera


Home
Calculus
Exercise 12
edukera
Deduction of 5
Reasoning
parallelism of opposite sides
non-contradiction
equal opposite sides
equality of opposite vectors
1
2
Preview
5 AKBJ is a parallelogram
Conclusion
a (AJ) and (KB) are parallel
according to 5 , by parallelism of opposite sides
Apply
Prove:
For every
if I is t
if J is t
then (BC
Initial conte
Let A
Let B
Let C
Let I
Let J
1 Assun
2 Assun
Let K be a point
3 K is the symmetric of J with respect to I
by construction of K
4 I is the midpoint of the segment [KJ]
according to 3 , by definition of the symmetric
5 AKBJ is a parallelogram
Deduce
according to 4 1 , by intersection of the diagonals at their mutual midpoint I
Conclusion
6 (BC) and (IJ) are parallel
Justify
E 12
onstration (section 1.3, auto translated) into practice in elementary geometry.
A
K
I
J
C
0:28 / 1:42

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?
- Comment échanger des preuves ?

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?
- Comment échanger des preuves ?
- Quelles sont les bonnes définitions ?

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?
- Comment échanger des preuves ?
- Quelles sont les bonnes définitions ?
- Comment prouver des programmes (impératifs ou fonctionnels) ?

Quelques défis de ce domaine de recherche

- Comment décrire les preuves ?
- Comment définir les structures algébriques ? (sous-typage, héritage, . . .)
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?
- Comment échanger des preuves ?
- Quelles sont les bonnes définitions ?
- Comment prouver des programmes (impératifs ou fonctionnels) ?
- . . .

Conclusion

- Les assistants de preuve sont utiles en mathématiques et en informatique.
- C'est maintenant faisable de formaliser de grandes preuves.
- Essayons de s'en servir pour l'enseignement.
- Attention c'est addictif !

Merci de votre attention.

Table des matières

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous-jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

Critère de de Bruijn

- Les preuves sont certifiée par un *noyau*.
  - Isabelle (très petit)
  - HOL (très petit)
  - Coq (relativement petit)

  En revanche, ni Mizar, ni PVS n'ont une notion de noyau.

Et l'automatisation ?

Une approche sceptique: on ne fait pas confiances aux démonstrateurs automatiques.
Deux solutions:

1. Prouver le prouveur.
2. Vérifier le résultat du prouveur: un certificat.

Exemples

- Égalité entre deux expressions prises dans un anneau ou dans un corps.
- Tautologies.
- Inégalités linéaires.
- Théorèmes en géométrie.
- ...

Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : string \to int \quad a : string}{f(a) :}$$

Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : string \to int \quad a : string}{f(a) : int}$$

Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : string \to int \quad a : string}{f(a) : int}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{f : A \to B \quad a : A}{f(a) : B}$$

Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : string \to int \quad a : string}{f(a) : int}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{f : A \to B \quad a : A}{f(a) : B}$$

Modus ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : string \to int \quad a : string}{f(a) : int}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Modus ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

Correspondance de Curry-Howard I

logique	programmation
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash (\text{fun } x : A \mapsto t) : A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash f : A \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B}$

Correspondance de Curry-Howard I

logique	programmation
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma, \quad A \vdash \quad B}{\Gamma \vdash \qquad\qquad A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \quad A \to B \quad \Gamma \vdash \quad A}{\Gamma \vdash \quad B}$

Correspondance de Curry-Howard I

logique	programmation
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$	$\dfrac{\Gamma,\ A \vdash\ B}{\Gamma \vdash\ A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash\ A \to B \quad \Gamma \vdash\ A}{\Gamma \vdash\ B}$

Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) :}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash B}$$

Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \mathit{fst}\ t : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \mathit{snd}\ t : B}$$

Correspondance de Curry-Howard III

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathit{inl}\ a : A + B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{inr}\ b : A + B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash m : A \vee B \quad \Gamma, x : A \vdash t : C \quad \Gamma, x : B \vdash u : C}{\Gamma \vdash \mathit{case}\ m\ \mathit{of}\ \mathit{inl}(a) => t \mid \mathit{inr}(a) => u : C}$$

Règles de simplification

$$
\begin{array}{rcl}
fst(A, B) & = & A \\
snd(A, B) & = & B \\
case\ (inl\ m)\ of\ inl(a) => t | inr(a) => u & = & t[x := m] \\
case\ (inr\ m)\ of\ inl(a) => t | inr(a) => u & = & u[x := m]
\end{array}
$$

Correspondance de Curry-Howard

Logique	**λ-calcul/programmation**
formule	type
preuve	terme/programme
vérification d'une démonstration	vérification de type
normalisation des preuves	β-réduction/calcul

Sémantique de Heyting-Kolmogorov

La sémantique de Heyting-Kolmogorov consiste à donner une interprétation fonctionnelle des démonstrations.

- Une preuve de $A \to B$ est une *fonction* qui, à partir d'une preuve de A donne une preuve de B.
- Une preuve de $A \wedge B$ est une *paire* composée d'une preuve de A et d'une preuve de B.
- Une preuve de $A \vee B$ est une paire (i, p) avec ($i = 0$ et p une preuve de A) ou ($i = 1$ et p une preuve de B).
- Une preuve de $\forall x.A$ est une fonction qui, pour chaque objet t construit un objet de type $A[x := t]$.

Cette interprétation consiste à *calculer avec des preuves*. Cela paraît très proche de la programmation fonctionnelle et du λ-calcul.

Retour sur la correspondance de Curry-Howard à travers la curryfication

```
Definition curry A B C (f:(A * B) -> C)
                                (x:A) (y:B) := f(x,y).
```

```
Lemma curry_prop: forall A B C : Type,
          (A * B -> C) -> A -> B -> C.
Proof.
 intros A B C f x y.
 apply f.
 split.
 apply x.
 apply y.
Defined.
```

```
Print curry_prop.
```

On obtient:

```
curry_prop =
fun (A B C : Type) (f : A * B -> C)
                   (x : A) (y : B) => f (x, y)
     : forall A B C : Type,
               (A * B -> C) -> A -> B -> C
```